

Grau en Matemàtiques

Títol: Dinàmica d'ions a la magnetosfera de la Terra

Autor: Gerard Contreras Molina

Director: Álvaro Meseguer & Francisco Marqués

Departament: Departament de Física

Convocatòria: 2019-2020



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en Matemàtiques
Treball de Final de Grau

Dinàmica d'ions a la magnetosfera de la Terra

Gerard Contreras Molina

Supervisat per Álvaro Meseguer Serrano & Francisco Marqués Truyol

Juny 2020

Agraïments

Per dur a terme aquest treball he tingut el suport de persones molt importants per mi i que sense elles no hauria estat possible arribar fins aquí.

Per això, vull agraïr primer de tot a la meva família per tots els ànims, i als meus companys del curs amb els quals ens hem ajudat mutuament amb petits dubtes i comentaris.

Sobretot vull donar-li les gràcies a la Clàudia per haver tingut tanta paciència i haver confiat en mi. També per haver-me ajudat tant a concentrar-me i per animar-me en tot moment. Sense ella hauria sigut tot molt més difícil.

També vull agraïr a l'Adrià per haver-me ajudat a entendre conceptes i haver perdut estones amb mi ajudant-me amb algunes parts.

I òbviament, moltíssimes gràcies als meus tutors Àlvaro i Paco per haver-me proporcionat tants recursos, ajudat quan m'he encallat i per haver-me proposat aquest treball. Sense ells res hauria estat possible.

Resum

En aquest treball es pretén explorar el problema de Störmer. Aquest tracta de l'estudi de les trajectòries dels ions en influència del camp magnètic terrestre.

Es durà a terme a partir de l'expressió del lagrangiana de la partícula i, gràcies al principi de Hamilton, s'utilitzarà l'equació de Euler-Lagrange per a deduir-ne l'equació diferencial que satisfan aquestes trajectòries. Per a resoldre-ho numèricament, s'usarà la funció ode45 de MATLAB.

Es farà una comparativa entre dos integradors de segon ordre, el mètode de Heun de Runge-Kutta i el mètode de Strang Splitting simplèctic de Verlet, per tal de determinar quin dels dos preserva millor les quantitats conservades.

A més, també es farà un estudi sobre la forma de les trajectòries en el pla equatorial, sobre un meridià i sobre una superfície esfèrica afegint una lligadura per a mantenir la partícula a distància constant.

Paraules clau

Equacions diferencials, Runge-Kutta, Störmer problem, Quantitats conservades, Integradors simplèctics, Heun, Strang Splitting.

Índex

1	Introducció	3
1.1	Objectius i procediment del treball	4
1.2	Magnetosfera terrestre	5
1.3	Dipol magnètic terrestre	6
2	Obtenció de les equacions	9
3	Formulació de les equacions	12
3.1	Coordenades cartesianes	12
3.1.1	Quantitats conservades	12
3.1.2	Equacions del moviment	13
3.2	Coordenades esfèriques	14
3.2.1	Quantitats conservades	15
3.2.2	Equacions del moviment	15
4	Resolució de l'equació diferencial	17
5	Comparació de les quantitats conservades entre integradors	21
5.1	Integrador de Heun	21
5.2	Integrador de Strang Splitting	22
5.3	Quantitats conservades i comparativa entre integradors	24
6	Moviments amb lligadures	28
6.1	Trajectòries sobre l'equador	28
6.2	Òrbites periòdiques sobre els meridians	31
6.3	Trajectòries a distància constant	33
7	Conclusions	37
	Referències	38
A	Codis de MATLAB	39
A.1	Integrador ode45 per a la equació general	39
A.2	Mètode de Heun	39
A.3	Mètode de Strang Splitting	40
A.4	Òrbites periòdiques sobre els meridians	42
A.5	Trajectòries a distància constant	43

1. Introducció

A la nostra vida quotidiana, les forces magnètiques no tenen gaire influència, i per a poder-les detectar es necessita l'ús d'aparells com per exemple la brúixola. Això és degut al fet que els materials que es troben al nostre entorn en general són neutres, és a dir, no estan carregats elèctricament. Els àtoms de tot element o compost estan formats de partícules subatòmiques, com són els protons (p^+) i electrons (e^-), els quals contenen una càrrega elèctrica positiva i negativa respectivament. Aquestes càrregues s'equilibren entre elles donant com a resultat la cancel·lació de les forces elèctriques i magnètiques. A més, les forces magnètiques no tenen gairebé efecte sobre els neutrons (n^0).

No obstant això, a més de 100 km de distància de la superfície de la Terra l'ambient és molt diferent. Les capes de l'atmosfera que es troben a aquestes distàncies es veuen escalfades a causa dels raigs X i de la llum ultraviolada provinents del Sol, entre d'altres. Aquest fet provoca que els electrons es despreguin de l'àtom i es formin ions carregats. En tenir una càrrega elèctrica, reaccionen davant la força magnètica terrestre i es veuen accelerats, arribant a assolir velocitats elevades que poden ocasionar corrents elèctrics i l'emissió d'ones de ràdio.

L'estudi del moviment de les partícules carregades en un camp magnètic ha estat un camp d'interès des del descobriment dels raigs còsmics, a inicis del segle XX. Aquest problema va ser estudiat extensivament per Carl Störmer durant diversos anys, pel que el problema s'ha anomenat Störmer problem [3]. Degut que els raigs còsmics estan compostos de partícules subatòmiques, la dinàmica d'aquestes partícules pertany al camp de la relativitat, encara que en aquest treball es considerarà una versió no relativista.

La principal motivació d'aquest estudi va ser la modelització del fenomen de les aurores boreals, i va ser impulsat després d'haver estat descoberts els cinturons de Van Allen a mitjans del segle passat.

Fins al moment, els matemàtics i físics havien estat estudiant el problema descrivint les dinàmiques d'una càrrega en un dipol magnètic, considerant el camp magnètic terrestre com al generat per una vara magnètica com a aproximació. Va ser Henri Poincaré qui ho va aconseguir resoldre a prop dels pols, observant un moviment espiral al voltant de les línies de camp, i com les càrregues eren repel·lides de les regions on el camp magnètic és més intens, és a dir, als pols.

Des de llavors, s'han estat desenvolupant alguns models analítics i numèrics per tal d'estudiar aquest problema, prenent especial interès a l'estudi d'òrbites confinades i altres tipus d'òrbites que depenen de les condicions inicials. L'any 1976 i després de dècades d'investigació, Dragt A. J. i Finn J. M. van demostrar explícitament que el problema de trobar òrbites era no integrable. De fet, avui dia es coneix que és caòtic.

Actualment, el camp magnètic terrestre correspon al d'un imant amb la polaritat invertida, és a dir, el pol nord magnètic se situa a l'hemisferi sud geogràfic, relativament prop del pol sud geogràfic. Les línies de camp magnètic surten del pol nord i es dirigeixen al pol sud, portant en aquella direcció a totes les partícules carregades positivament (i en sentit oposat les carregades negativament).

1.1 Objectius i procediment del treball

En aquest treball es tractarà el problema de Störmer. S'estudiarà el comportament de les trajectòries dels ions en influència del camp magnètic terrestre. El desenvolupament es farà realitzant primer de tot una introducció a les nocions importants que s'utilitzaran en el desenvolupament del treball. Després, es farà tot el procediment de deducció de les equacions en diferents sistemes de coordenades, per així identificar quines són les quantitats que es conserven al llarg del moviment de la partícula.

Posteriorment, s'usarà MATLAB per tal d'integrar de manera numèrica el sistema d'equacions obtingut utilitzant l'integrador ode45 implementat al propi programari, que es tracta d'un mètode de Runge-Kutta de cinquè ordre i pas variable.

Una vegada observades les òrbites, es farà una comparativa entre dos tipus diferents d'integradors per a comparar els resultats i determinar quin és el que preserva millor les quantitats conservades. Els dos integradors a comparar seran el mètode de Heun, del tipus Runge-Kutta de segon ordre i el mètode de Strang Splitting, integrador simplèctic de Verlet també de segon ordre.

A més, es farà un estudi sobre les trajectòries en diferents superfícies per tal de donar una major visibilitat al problema. En concret, es farà un estudi de les òrbites en el pla equatorial, en el pla meridional i en una superfície esfèrica centrada en el dipol.

El procediment a seguir serà el següent:

- Determinar els graus de llibertat del sistema, és a dir, quantes coordenades cal utilitzar perquè el problema estigui ben definit.
- Escollir el sistema de referència que millor s'adequa al que es vol resoldre.
- Identificar les forces que actuen sobre la partícula per tal de determinar la seva energia potencial V i l'energia cinètica T . D'aquesta manera, es podrà construir el lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$.
- Observar quines són les quantitats conservades a partir de \mathcal{L} . Això es pot determinar observant de quines variables es té dependència explícita en el lagrangiana.
- Obtenir el sistema d'equacions diferencials que s'adequa al moviment de la partícula mitjançant l'equació d'Euler-Lagrange.
- Trobar les trajectòries desitjades usant l'integrador de MATLAB ode45.
- Estudiar el comportament dels integradors de Heun i de Strang Splitting vers les quantitats conservades.
- Restringir l'espai en les diferents superfícies per tal de trobar òrbites periòdiques i comprendre millor el moviment de la partícula.

Abans de començar amb tot el formalisme s'explicaran alguns conceptes importants que seran clau en el desenvolupament d'aquest treball.

1.2 Magnetosfera terrestre

La magnetosfera terrestre és la capa més externa de la Terra, generada pel camp magnètic provinent de la rotació del seu nucli metàl·lic. Aquest camp interacciona amb el corrent de partícules carregades provinents del Sol, conegudes com a vent solar, i que els provoca que es modifiqui la seva trajectòria.

Aquesta capa s'estén per sobre de la ionosfera a més de 500 km de distància de la superfície, i és l'encarregada de protegir l'atmosfera i la superfície de la Terra de les radiacions que hi arriben, com ara el vent solar i raigs còsmics, desviant-ne les partícules carregades cap als pols magnètics a través de les línies de camp.

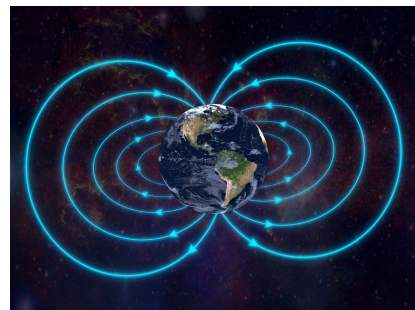


Figura 1: Camp magnètic terrestre.

La frontera entre el camp magnètic i el vent solar s'anomena magnetopausa, i té un front en forma de bala que canvia progressivament a un cilindre (veure figura 2), i el seu tall transversal té una forma quasi circular. La regió interior de la magnetopausa es pot dividir en diverses regions:

- La magnetosfera interior, que s'estén des del front i fins a una distància de 8 radis terrestres (sense incloure la regió sobre els pols).
- La làmina de plasma, que és una capa de plasma calent centrada en l'equador de la cua, amb un gruix d'uns 3-7 radis terrestres i amb grans variacions de densitat i energia.
- Els lòbuls de la cua, que són dues regions amb un camp magnètic relativament lliure, les línies de camp del qual es mantenen gairebé en la mateixa direcció fins a convergir sobre els pols.

Depenent de la intensitat del vent solar, la magnetosfera varia de mida i de forma, de manera que es veu més compactada en la banda diürna, i es veu molt allargada en la cara posterior.

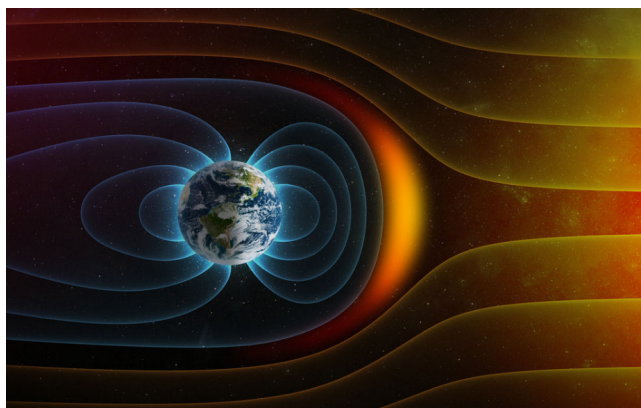


Figura 2: Magnetosfera sota la influència de l'energia solar.

A l'interior d'aquest camp magnètic les línies de camp deixen les partícules confinades en una regió, oscil·lant entre els pols magnètics. Aquestes regions de partícules atrapades conformen els cinturons de Van Allen.

Els cinturons de Van Allen són les zones de la magnetosfera terrestre de forma toroidal que envolten la Terra, i és on es concentren partícules carregades elèctricament. De fet, existeixen dos cinturons de Van Allen. El cinturó interior s'estén dels 1.000 km a més de 5.000 km de la superfície terrestre, mentre que el cinturó exterior s'estén des d'uns 15.000 km fins a uns 20.000 km.

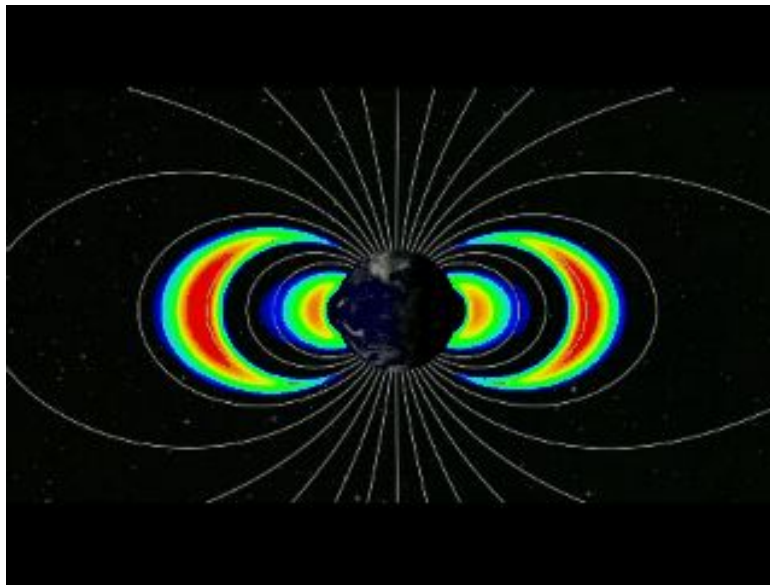


Figura 3: Cinturons de Van Allen.

Aquests cinturons es generen a causa del camp magnètic terrestre, atrapant i confinant partícules provinents del Sol i de la interacció de l'atmosfera terrestre amb radiacions celestials i radiació solar d'alta energia. A més, actuen com a protecció per a evitar el deteriorament de l'atmosfera i la superfície terrestre. Tanmateix, aquesta protecció no és perfecta.

D'una banda, les partícules més ràpides es poden escapar pels pols i xocar contra l'atmosfera, donant lloc a les conegudes aurores boreals i australs. D'altra banda, si es produeix una erupció solar considerable, els cinturons es poden saturar provocant danys en satèl·lits i induint forts corrents elèctrics a la superfície terrestre.

1.3 Dipol magnètic terrestre

Encara que habitualment es defineix un dipol magnètic com una espira o distribució de corrent, de fet el que el caracteritza és el camp magnètic que genera. En un dipol magnètic, les línies de camp són tancades, i van del pol nord al pol sud magnètic. Un exemple de partícula amb un camp magnètic propi d'un dipol és l'electró. Es pot observar però, que lluny de ser una distribució de corrent, l'electró és una càrrega puntual. La causa del seu camp dipolar prové del seu moviment de rotació, anomenat espín. Per tant, es poden tenir partícules puntuals que també tinguin un comportament dipolar.

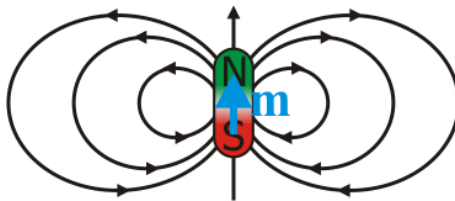


Figura 4: Aspecte de les línies de camp d'un dipol magnètic.

Com s'ha dit abans, aquest camp magnètic no existeix de forma espontània i sense motiu. La causa que alguns cossos com planetes o electrons tinguin un camp magnètic dipolar resideix en la seva rotació. [1]

En el cas de la Terra, en el segle XVI William Gilbert va proposar que la causa que la Terra actués com a un imant era degut al fet que el material del qual estava compost el nucli terrestre era principalment ferro en estat líquid. En combinació amb les variacions de temperatura, aquest fluid genera uns corrents de convecció que el fan circular per l'interior del nucli extern en relació amb la Terra. Degut que el ferro és un material conductor d'electricitat, si es produeix per exemple una fricció entre plaques, es poden produir càrregues elèctriques, amb les quals es produeix un bucle de corrent (que podria comparar-se amb el camp magnètic creat per un solenoide) que podria sostenir el camp magnètic terrestre. Aquest efecte és conegut com a efecte dinamo. La magnitud del camp magnètic mesurada des de la superfície terrestre és d'aproximadament 0.5 Gauss (equivalent a $5 \cdot 10^{-5} T$).

Originalment, el dipol magnètic es defineix a partir d'una espira de corrent. La força d'aquest dipol, anomenada **moment dipolar**, es pot pensar com a l'habilitat de rotar sobre si mateix per tal d'alinear-se amb un camp magnètic extern. En un camp magnètic uniforme, la magnitud del moment dipolar és proporcional al total de parell aplicat quan el dipol forma un angle correcte amb el camp magnètic.

Aleshores, es pot definir el **moment dipolar magnètic \mathbf{m}** o simplement **moment magnètic** com a la quantitat màxima de parell causada per la força magnètica externa.

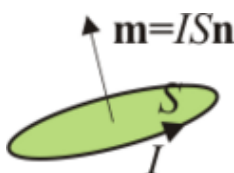
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

on $\boldsymbol{\tau}$ és el moment de les forces i \mathbf{B} és el camp magnètic.

Un dels exemples més senzills de moment dipolar magnètic és el d'una espira conductora de corrent, d'intensitat I i superfície S , per la qual la magnitud del moment és

$$|\mathbf{m}| = IS.$$

La direcció del vector s'obté amb la regla de la mà dreta en el sentit de la intensitat. Aleshores, serà un vector normal a la superfície.



El potencial vector d'un dipol magnètic puntual ve donat per

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

on \mathbf{m} representa el **moment dipolar magnètic** i \mathbf{r} la **distància** entre el dipol i la partícula.

Per tal de determinar el camp magnètic $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ creat per aquest dipol de moment magnètic \mathbf{m} situat a l'origen de coordenades, només cal calcular el rotacional del potencial vector (1):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}. \quad (2)$$

En particular, en aquest treball estudiarem el camp magnètic de la Terra. Encara que la geometria dels camps magnètics és bastant complexa, pot aproximar-se simplement pel camp d'un dipol magnètic, actualment inclinat en un angle d'aproximadament 11 graus respecte de l'eix de rotació de la Terra.

2. Obtenció de les equacions

Definició 2.1. Donat un sistema de coordenades generalitzades $\{q_i\}$, es defineix el **lagrangiana** \mathcal{L} d'un sistema com:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t), \quad (3)$$

on T és l'energia cinètica de la partícula, i V és l'energia potencial.

En el nostre cas, el sistema a estudiar és la partícula que està en moviment, moguda per la influència del camp magnètic terrestre.

Definició 2.2. L'acció d'un sistema es defineix com a una funció $S : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisfà

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \quad (4)$$

Aquesta magnitud representa la quantitat d'energia implicada en un procés pel seu temps de duració. En altres paraules, com més alt sigui el valor de l'acció, més energia s'haurà emprat per arribar d'un estat a l'altre.

Si no hi ha forces no conservatives que actuïn al sistema i per tant no hi ha pèrdues d'energia, es té que de manera natural, tot sistema físic satisfà el principi de mínima acció.

Proposició 2.3 (Principi de Hamilton). *El principi de mínima acció de Hamilton postula que, fixat un sistema de coordenades generalitzades, de totes les possibles trajectòries possibles que transcorren del temps t_1 al temps t_2 , de manera natural passarà aquella tal que l'acció prengui un valor estacionari (no necessàriament un mínim), és a dir, aquella que satisfaci que*

$$\delta S = 0. \quad (5)$$

D'aquest principi es pot deduir que de manera natural el sistema evolucionarà de forma que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (6)$$

i mitjançant principis variacionals, es pot veure que la invariància de la integral temporal del lagrangiana equival a què el lagrangiana satisfaci les equacions d'Euler-Lagrange.

Definició 2.4. Les **equacions d'Euler-Lagrange**, obtingudes per mitjans variacionals a l'equació (6), són unes equacions que permeten trobar el sistema d'edos d'ordre 2 que satisfà el moviment del sistema, i són les següents:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (7)$$

A part de ser útils per a deduir les equacions del moviment, també ho són per a determinar les quantitats que es conserven al llarg de la trajectòria. A continuació, s'explica com trobar quantitats conservades:

Suposem que per a cert q_i se satisfà

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (8)$$

és a dir, que \mathcal{L} no depèn explícitament de q_i . Aleshores, s'obté que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = C. \quad (9)$$

Per tant, en aquest cas es té que el moment associat a q_i és una quantitat conservada en el moviment. Anem a veure quina interpretació té aquest valor.

Definició 2.5. El **moment generalitzat** p_k respecte de la coordenada q_k és una magnitud que s'obté derivant el lagrangiana respecte de la velocitat de la coordenada q_k , és a dir,

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (10)$$

Aquest moment es tractarà d'un moment lineal (o quantitat de moviment) en cas que la coordenada q_k sigui lineal, i es tractarà d'un moment angular si la coordenada és angular.

Aleshores, es pot deduir que si el lagrangiana no depèn explícitament d'una coordenada, el moment generalitzat associat a aquella coordenada es mantindrà constant.

En cas que el lagrangiana no tingui dependència explícita del temps, és a dir que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

aleshores direm que es conserva el hamiltonià del sistema, que en aquest cas, aquest representa l'energia mecànica. Vegem que efectivament és així:

Definició 2.6. El **hamiltonià** d'un sistema es defineix com:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (12)$$

Proposició 2.7. Si el lagrangiana no depèn explícitament del temps, és a dir, se satisfà la condició

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

aleshores \mathcal{H} es manté constant, i és equivalent a l'energia mecànica del sistema.

Demostració. Vegem que la variació del hamiltonià és zero. Comencem usant la definició de \mathcal{H} :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \quad (14)$$

Resolent les derivades temporals s'obté:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n [\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k] - \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Havíem definit $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$. Substituint, es simplifiquen dos termes:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n \left[\dot{p}_k \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left[\dot{p}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right] \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Substituint $\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right)$ s'obté:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right] \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Es pot observar que l'expressió obtinguda dins del sumatori val 0 per les equacions d'Euler-Lagrange. Aleshores, la igualtat s'acaba reduint a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (15)$$

i concloem que si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ aleshores el hamiltonià \mathcal{H} es manté constant.

Vegem ara que això equival a l'energia mecànica. Per a fer-ho, prenem l'expressió (12) i la reescrivim en termes del lagrangianà:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t).$$

Observem que si l'energia potencial no depèn explícitament de les velocitats, aleshores se satisfà que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = m \sum_{k=1}^n \dot{q}_k^2 = 2T.$$

Substituint a l'equació anterior s'obté que

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 2T - (T - V) = T + V = E_m. \quad (16)$$

Amb això hem vist que efectivament, el hamiltonià d'un sistema es correspon amb la seva energia mecànica. \square

3. Formulació de les equacions

En aquest apartat s'usaran diferents sistemes de coordenades per determinar quines són les equacions que satisfà el moviment de la partícula a estudiar. Per començar, es farà tot el procediment en coordenades cartesianes i s'estudiaran les quantitats conservades. Posteriorment, es resoldrà el mateix problema en coordenades esfèriques per tal de detectar possibles simetries que comportin noves quantitats conservades que no s'hagin observat anteriorment.

3.1 Coordenades cartesianes

Per començar, cal definir quines són les coordenades sobre les quals es vol treballar. Prenem un sistema de referència en coordenades cartesianes (x, y, z) a l'espai i centrades en el dipol. Per a poder determinar la posició al llarg del temps cal saber també les seves velocitats $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. A més, totes les coordenades són independents de la resta, pel que en total es disposa de 6 graus de llibertat. Ara cal determinar quin és el lagrangiana del sistema.

Es té que l'expressió del potencial vectorial del dipol magnètic es pot expressar com a (1). Agafarem el moment dipolar \mathbf{m} en la direcció de l'eix z , de manera que $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{k}}$.

De l'equació de la força de Lorentz

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (17)$$

es pot deduir que el potencial generalitzat corresponent al camp magnètic de potencial vector \mathbf{A} és

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 em}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{Mb}{r^3} \hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad b = \frac{\mu_0 em}{4\pi M}, \quad (18)$$

on s'hi ha introduït b per a simplificar expressions posteriors. Aleshores, el lagrangiana del sistema és

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2 + \frac{Mb}{r^3} \hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2 + \frac{b}{r^3} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{L}, \quad (19)$$

on $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times M\mathbf{v}$ és el moment angular de la partícula. L'expressió de \mathcal{L} en cartesianes és immediata:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{Mb}{r^3}(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (20)$$

3.1 Quantitats conservades

Com que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, llavors no hi ha cap variable cíclica. Es pot observar però que el lagrangiana no depèn explícitament del temps. Aleshores, l'única magnitud que es conserva és el hamiltonià, que correspon a l'energia.

Es calculen ara els seus moments generalitzats.

Definició 3.1. Els **moments** associats a cadascuna de les components es poden trobar segons l'expressió següent:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (21)$$

En general, si $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ és el vector de les velocitats, llavors el moment generalitzat és de la forma

$$\mathbf{p}_g = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = M\mathbf{v} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{Mb}{r^3} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}. \quad (22)$$

Com que el potencial generalitzat és lineal en la velocitat, aleshores es dedueix que el hamiltonià coincideix amb l'energia cinètica T , ja que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_g - e\mathbf{A})^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2 = E_c. \quad (23)$$

Per tant, l'energia cinètica del sistema es conserva.

3.1 Equacions del moviment

Per tal de deduir les equacions que satisfà el moviment de la partícula, s'utilitzarà la fórmula d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (24)$$

sobre el lagrangiana del sistema.

Prenent l'expressió (20) del lagrangiana, imposem la fórmula per a cadascuna de les coordenades per obtenir el sistema d'equacions diferencials. En aquest cas es farà per la coordenada x , i la resta s'esdevenen de manera similar.

Procedim amb la coordenada x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(M\dot{x} - \frac{Mb}{r^3} y \right) - \frac{Mb}{r^3} \dot{y} + \frac{3Mb}{r^4} \frac{x}{r} (x\dot{y} - y\dot{x}) = 0,$$

on s'ha usat que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Es resol ara la derivada temporal:

$$M\ddot{x} - \frac{Mb}{r^3} \dot{y} + \frac{3Mb}{r^5} y(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) - \frac{Mb}{r^3} \dot{y} + \frac{3Mb}{r^5} x(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0.$$

Simplificant les masses i arreglant el resultat s'obté

$$\ddot{x} = \frac{2b}{r^3} \dot{y} - \frac{3b}{r^5} (xy\dot{x} + y^2\dot{y} + yz\dot{z} + x^2\dot{y} - xy\dot{x}).$$

Extraient factor comú i simplificant el resultat, s'obté l'equació següent:

$$\ddot{x} = \frac{b}{r^5} [(3z^2 - r^2)\dot{y} - 3yz\dot{z}]. \quad (25)$$

Es repeteix el mateix procediment per a les altres coordenades, i finalment s'obté el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{b}{r^5} [(3z^2 - r^2)\dot{y} - 3yz\dot{z}] \\ \ddot{y} = \frac{b}{r^5} [(r^2 - 3z^2)\dot{x} + 3xz\dot{z}] \\ \ddot{z} = \frac{b}{r^5} 3z(y\dot{x} - x\dot{y}). \end{cases} \quad (26)$$

Alternativament, aquestes equacions de moviment es poden obtenir a partir de la segona llei de Newton, on es considera que l'única força que actua és la força de Lorentz.

$$M\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \text{on } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}, \quad (27)$$

on e és la càrrega de l'ió.

Aquestes equacions descriuen el moviment de la partícula en la influència del camp magnètic terrestre. En considerar la Terra com a una esfera, podem beneficiar-nos de les seves simetries per a intentar trobar més quantitats conservades i, en cas que n'existeixi alguna, podrem reduir en un paràmetre el nostre problema. Per tal de determinar si estem en aquesta situació, farem el mateix procediment però usant coordenades esfèriques.

3.2 Coordenades esfèriques

En aquest cas s'utilitzaran les coordenades esfèriques per a resoldre el problema. Denotarem cadascuna de les seves coordenades per (r, ϕ, θ) , on $r > 0$ representa la distància radial prenent com a origen el centre de la Terra, $\phi \in [0, 2\pi)$ representa l'azimut o longitud, i $\theta \in [0, \pi]$ representa la colatitud. Les corresponents velocitats les denotarem per $(\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta})$.

La relació que aquestes coordenades mantenen amb les cartesianes és la següent:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (28)$$

Per a poder trobar l'expressió del lagrangiana, cal obtenir les velocitats en aquest nou sistema de coordenades. Derivant l'expressió anterior s'obté:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \phi \sin \theta - r \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta. \end{cases} \quad (29)$$

A més, es poden obtenir els vectors tangents unitaris corresponents a les direccions considerades com

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \end{cases} \quad (30)$$

Aleshores, la velocitat total del moviment de la partícula és

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (31)$$

Per tant, es pot observar que es tenen les següents equivalències:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} - r^2\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{L} = L_z = Mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta. \quad (32)$$

Substituint aquestes noves coordenades a l'equació del lagrangiana obtinguda en coordenades cartesianes, s'aconsegueix la següent expressió:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{Mb}{r}\dot{\phi}\sin^2\theta. \quad (33)$$

3.2 Quantitats conservades

Podem observar que el lagrangiana que s'ha obtingut mitjançant les coordenades esfèriques no té dependència explícita del temps, d'igual manera que passava en el sistema de coordenades cartesianes. Tanmateix, en aquest cas es pot observar que el lagrangiana tampoc depèn de manera explícita de la posició azimuthal ϕ , i d'això se'n dedueix una altra quantitat conservada corresponent al moment angular azimuthal p_ϕ . Calculem ara els moments generalitzats en aquest sistema de coordenades:

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = M\dot{r} \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = Mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = Mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta + \frac{Mb}{r}\sin^2\theta = L_z + \frac{Mb}{r}\sin^2\theta = M\ell. \end{cases} \quad (34)$$

Com que p_ϕ es conserva, aleshores ℓ és el moment conservat corresponent al moment angular respecte de la variable ϕ . Observem que té una relació amb el moment lineal L_z , però no coincideixen perquè aquest no es conserva. Per tant, les magnituds conservades són:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta = u^2, \quad \left(r^2\dot{\phi} + \frac{b}{r}\right)\sin^2\theta = \ell. \quad (35)$$

Es pot escriure ℓ en cartesianes:

$$\ell = \frac{b}{r^3}(x^2 + y^2) + x\dot{y} - y\dot{x}. \quad (36)$$

A més, l'expressió de l'energia cinètica també pot ser expressada en termes de r i θ , eliminant així la coordenada ϕ . Aïllant $\dot{\phi}$ de la segona equació de (5.3):

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2\sin^2\theta} - \frac{b}{r^3}. \quad (37)$$

Aleshores, es pot substituir en l'expressió de l'energia:

$$u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{\ell}{r\sin\theta} - \frac{b\sin\theta}{r^2}\right)^2. \quad (38)$$

3.2 Equacions del moviment

Usant novament les equacions d'Euler-Lagrange (7) a l'expressió (33) del lagrangiana es podrà obtenir el sistema d'equacions diferencials que regeix el moviment de la partícula, ara en coordenades esfèriques.

El càlcul per a la coordenada radial r és:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}(M\dot{r}) - \left(Mr\dot{\theta}^2 + Mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta - \frac{Mb\dot{\phi}\sin^2\theta}{r^2}\right) = 0.$$

Simplificant les masses i aïllant \ddot{r} s'obté:

$$\ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - \frac{b}{r^2}\dot{\phi}\sin^2\theta. \quad (39)$$

Mitjançant el mateix procediment, es pot obtenir l'equació del moviment de la coordenada angular θ .

Aleshores, s'arriba a la següent expressió per a les equacions de moviment:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{b}{r^2} \dot{\phi} \sin^2 \theta \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \left(r^2 \dot{\phi} + \frac{2b}{r} \right) \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (40)$$

Com que la quantitat ℓ es conserva, es poden reescriure aquestes equacions en funció de ℓ substituint $\dot{\phi}$ per l'obtinguda en l'expressió (37):

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{3b\ell}{r^4} + \frac{2b^2 \sin^2 \theta}{r^5} \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \left(\frac{\ell^2}{r^2 \sin^4 \theta} - \frac{b^2}{r^4} \right) \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (41)$$

Resolent aquestes equacions diferencials per mètodes numèrics podrem estudiar com són les trajectòries d'aquesta partícula en la influència del camp dipolar magnètic. L'obtenció de les trajectòries es veurà en el següent capítol.

4. Resolució de l'equació diferencial

Una vegada obtingudes les equacions del moviment, ara cal resoldre el sistema d'equacions diferencials de segon ordre. Degut que la seva expressió és complexa i que de fet el problema és no integrable, es realitzaran els càlculs mitjançant integradors numèrics usant MATLAB com a programari.

A més de resoldre l'equació diferencial, també voldrem estudiar com de bé preserven les quantitats conservades els integradors utilitzats, i fer un estudi sobre quin tipus d'integrador és més eficient en aquest aspecte.

Per tal de trobar quines són les trajectòries que segueix la nostra partícula s'utilitzaran les equacions obtingudes en coordenades cartesianes, que recordem que són

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{b}{r^5}[(3z^2 - r^2)\dot{y} - 3yz\dot{z}] \\ \ddot{y} = \frac{b}{r^5}[(r^2 - 3z^2)\dot{x} + 3xz\dot{z}] \\ \ddot{z} = \frac{b}{r^5}3z(x\dot{y} - y\dot{x}), \end{cases} \quad (42)$$

tal com teníem a (26).

Per a resoldre aquest sistema d'equacions diferencials de segon ordre, primer de tot l'escrivim com a un sistema de primer ordre, afegint tres equacions addicionals que relacionin la posició i les seves respectives velocitats.

Siguin u , v i w les velocitats de les components x , y i z respectivament. Aleshores, el sistema a resoldre és el següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = \frac{b}{r^5}[(3z^2 - r^2)v - 3yzw] \\ \dot{v} = \frac{b}{r^5}[(r^2 - 3z^2)u + 3xzw] \\ \dot{w} = \frac{b}{r^5}3z(yu - xv). \end{cases} \quad (43)$$

A partir d'aquest sistema d'equacions diferencials es procedirà a tractar les diferents solucions obtingudes mitjançant l'integrador ode45. Aquest és un mètode de Runge-Kutta de pas de temps variable d'ordre 4-5 propi de MATLAB per a resoldre EDOS. Està dissenyat per tractar amb problemes del tipus

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Sigui $\mathbf{a} = (x, y, z, u, v, w)$ el vector de coordenades generalitzades, i definim adonç com al vector $\dot{\mathbf{a}}$. Aleshores, el sistema que crearem serà el següent, considerant $b = 1$:

```

adot = a*0; r = (x^2+y^2+z^2)^.5;
adot(1) = u;
adot(2) = v;
adot(3) = w;
adot(4) = (1/r^5)*((3*z^2-r^2)*v - 3*y*z*w);
adot(5) = (1/r^5)*(3*x*z*w+(r^2-3*z^2)*u);
adot(6) = (3*z/r^5)*(y*u-x*v);

```

Una vegada creat el sistema a resoldre, cal fixar unes condicions inicials. Suposem que la partícula es troba en el punt $(1, 0, 0)$ viatjant a una velocitat $\mathbf{v} = (0, 0, 0.1)$ en coordenades cartesianes és a dir, desplaçant-se en direcció \mathbf{k} .

Aquest vector es pot representar com a $(1, 0, 0, 0, 0, 0.1)$, on les tres primeres components són la posició (x, y, z) i les restants són les velocitats (u, v, w) .

Per tant, es defineix el vector de condicions inicials com:

```
ci = [1;0;0;0;0;0.1]
```

En aquesta situació deixem passar un temps equivalent a 2000 segons, el qual el notem com a T_{max} .

Adicionalment, demanem a l'integrador que l'error relatiu i absolut siguin menors a 10^{-12} mitjançant les opcions:

```
options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
```

Una vegada definits tots els paràmetres necessaris, executem l'integrador amb la següent instrucció:

```
ode45(@vfield,[0 Tmax],ci,options);
```

On `vfield` fa referència a la funció de MATLAB que conté el sistema d'equacions. D'aquesta manera, s'obté el següent gràfic 3D que simula el moviment de la partícula:

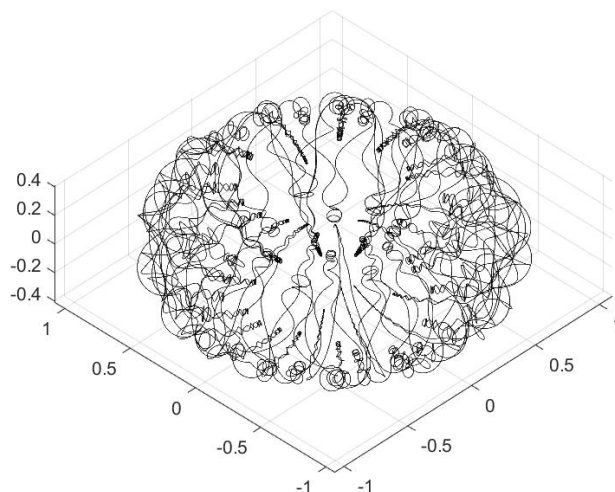


Figura 5: Trajectòries 3D dels ions en influència del camp magnètic terrestre obtingudes amb l'integrador de Runge-Kutta.

La primera impressió sobre aquest gràfic pot ser que la partícula es mou seguint una trajectòria caòtica mentre oscil·la entre el pol nord i sud repetidament. De totes maneres, observem que la seva distribució al llarg de les diferents latituds sembla no ser molt dispersa. Per tal de comprovar com és aquesta distribució, podem col·lapsar la gràfica sobre un sol meridià, i es pot observar que efectivament existeix una regió on la partícula queda confinada i que té forma d'anell. Aquests anells són els que reben el nom de cinturons de Van Allen.

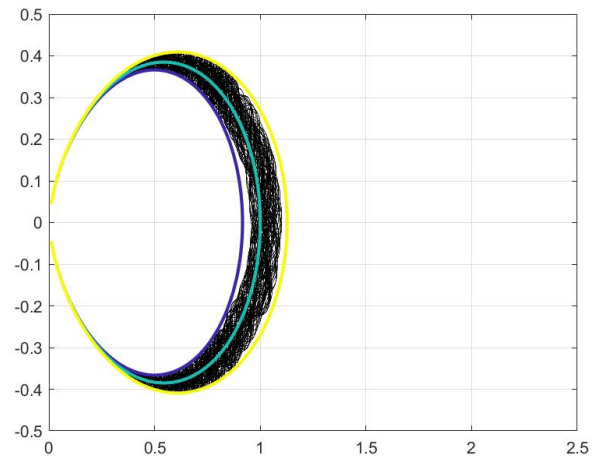


Figura 6: Cinturó de Van Allen on es mou la partícula.

Un altre fet que es pot observar és que mentre es va augmentant la velocitat en la direcció \vec{k} , el rang de distàncies augmenta, és a dir, el cinturó de Van Allen s'aprecia més gran del vist anteriorment. Si augmentem la velocitat fins a 0.25, es pot observar que s'arriba al cas d'una partícula confinada de manera crítica, és a dir, que eventualment pot escapar a causa de la seva gran energia. Aquest tipus de trajectòries són les anomenades òrbites homoclíniques.

Definició 4.1. Una **òrbita homoclínica** és aquella que convergeix a un cert punt x_0 per $t \rightarrow \pm\infty$. En altres paraules, aquesta òrbita és la limitació entre les òrbites confinades i les òrbites que escapen.

Gràficament, es pot observar el següent comportament:

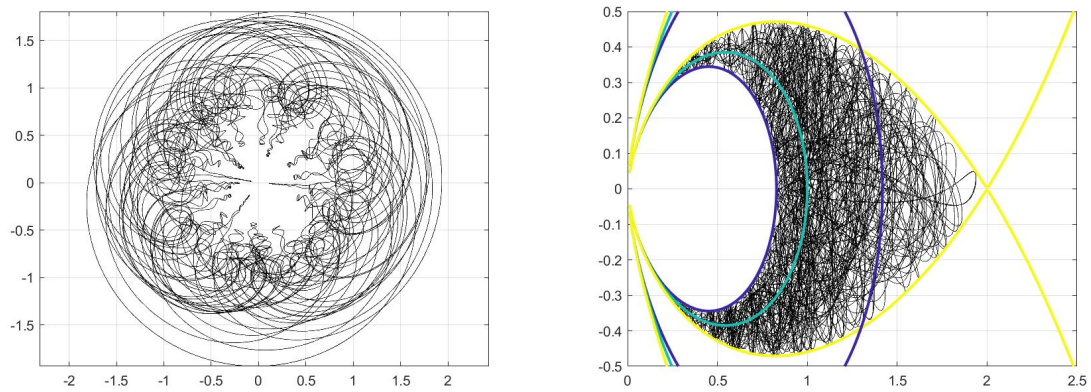


Figura 7: Òrbita amb alta energia que eventualment pot escapar de la influència del camp magnètic.

A partir de la velocitat descrita anteriorment, la partícula pot escapar del cinturó de Van Allen, escapant de la influència del camp magnètic després de fer algunes oscil·lacions. Posteriorment es veurà com es comporten les quantitats conservades respecte d'aquest integrador.

5. Comparació de les quantitats conservades entre integradors

En aquesta secció es farà un estudi entre els dos integradors proposats per a determinar quin d'ells preserva millor les quantitats conservades al llarg del temps. Aquests seran els mètodes de Heun i de Strang Splitting. Començarem fent una introducció als dos integradors veient quina és la seva implementació i s'obtinran les òrbites calculades amb cada mètode. Seguidament, es veurà el comportament de les quantitats conservades per a cadascun d'ells, i es farà una comparativa fent una figura conjunta amb els dos resultats.

S'han escollit aquests dos mètodes per ser els dos de segon ordre. En cas que els ordres no coincidissin, aleshores els mètodes podrien no ser comparables. [5]

Els càlculs es faran fins a 1000 unitats de temps.

5.1 Integrador de Heun

L'integrador de Heun és un cas particular de la família d'integradors de Runge-Kutta de segon ordre. Es pot trobar més informació sobre aquest tipus d'integradors a [6].

Els mètodes de Runge-Kutta de segon ordre són de la forma següent:

$$\Phi(t, x) = \omega_0 k_0 + \omega_1 k_1, \quad (44)$$

Sigui h el pas de temps. Els coeficients k_0 i k_1 venen donats per:

$$\begin{aligned} k_0 &= f(t, x) \\ k_1 &= f(t + \theta_1 h, x + (\omega_{10} k_0)h). \end{aligned} \quad (45)$$

L'objectiu és obtenir els valors de ω_0 , ω_1 , θ_1 i ω_{10} per tal que l'error de truncament sigui mínim.

El mètode de Heun és un mètode de Runge-Kutta de segon ordre amb els coeficients

$$\omega_0 = \frac{1}{2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_1 = 1, \quad \omega_{10} = 1, \quad (46)$$

que una vegada desenvolupat queda de la forma

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i))]. \quad (47)$$

Aquest algorisme es pot aplicar en dos passos com:

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i) + f(t_i + h, \hat{x}_i)]. \end{cases} \quad (48)$$

Donades les mateixes condicions inicials que en el cas anterior de l'ode45, aleshores el mètode de Heun ens dona una figura bastant similar:

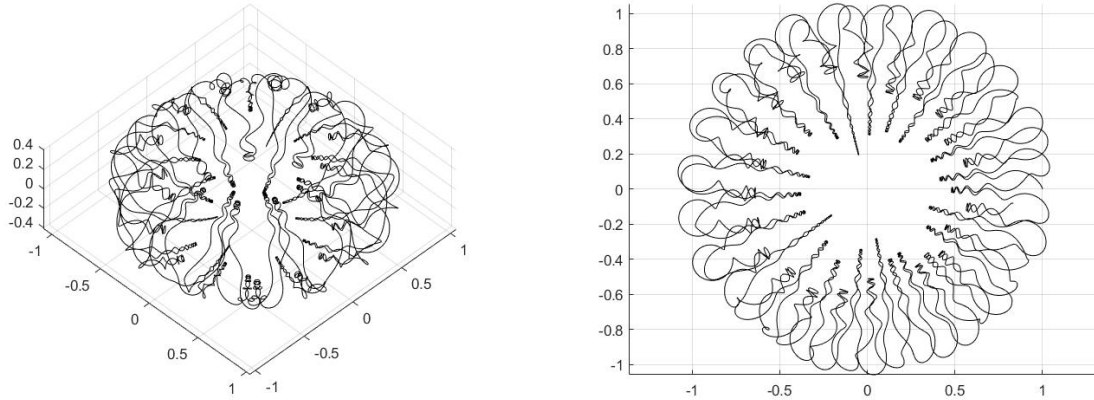


Figura 8: Trajectòries 3D dels ions en influència del camp magnètic terrestre obtingudes amb l'integrador de Heun.

5.2 Integrador de Strang Splitting

Introduïm els mètode de Störmer-Verlet per a resoldre equacions diferencials, amb algunes propietats interessants en el cas de les EDOs de segon ordre de la forma següent:

$$\ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}),$$

on la F no depèn de $\dot{\mathbf{q}}$. Aquesta equació és molt comuna en física. A més, hi ha algunes variacions d'aquest mètode per a resoldre EDOs de segon ordre generals.

El mètode de Strang Splitting és un mètode modificat de la família d'integradors de Störmer-Verlet que permet resoldre explícitament problemes amb hamiltonians no separables. Es pot trobar més informació sobre aquest tipus d'integradors a [7].

Definició 5.1. El hamiltonià d'un sistema es diu que és **separable** si es pot escriure com

$$H(q, p) = T(p) + V(q). \quad (49)$$

Altrament, quan el potencial depèn dels moments de les partícules i per tant no es pot escriure d'aquesta manera, es diu que és no separable. [8]

El nostre problema és no separable, pel que no podem aplicar directament Störmer-Verlet, sinó que hi hem de fer algunes modificacions.

En efecte, el hamiltonià del nostre problema és

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (50)$$

Podem calcular els moments associats a cadascuna de les variables. Sabent que el lagrangian és de la forma (20), es pot deduir que

$$\begin{cases} p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} - Mb\frac{y}{r^3} \\ p_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} + Mb\frac{x}{r^3} \\ p_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}. \end{cases} \quad (51)$$

Sigui $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ i $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Aleshores, \mathcal{H} es pot escriure com:

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - bp_y \frac{x}{r^3} + bp_x \frac{y}{r^3} + \frac{Mb^2}{2} \frac{x^2 + y^2}{r^6} \quad (52)$$

Per tant, es pot observar que el hamiltonià del problema no és separable.

Es considera el hamiltonià ampliat [9]

$$\bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B + \omega \mathcal{H}_C, \quad (53)$$

on $\mathcal{H}_A := \mathcal{H}(q, y)$ i $\mathcal{H}_B := \mathcal{H}(x, p)$ són dues còpies exactes del sistema original, amb posicions i moments combinats i $\mathcal{H}_C := ||q - x||_2^2/2 + ||p - y||_2^2/2$ és una restricció artificial, controlada per la constant ω .

Pel problema inicial es té que

$$\begin{cases} \dot{Q} = \partial_P \mathcal{H}(Q, P) \\ \dot{P} = -\partial_Q \mathcal{H}(Q, P). \end{cases} \quad (54)$$

Amb el sistema ampliat es té que

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) & q(0) = Q_0 \\ \dot{p} = -\partial_q \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) & p(0) = P_0 \\ \dot{x} = \partial_y \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) & x(0) = Q_0 \\ \dot{y} = -\partial_x \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) & y(0) = P_0, \end{cases} \quad (55)$$

i, de fet, aquests dos últims tenen la mateixa solució ja que $q(t) = x(t) = Q(t)$, $p(t) = y(t) = P(t)$.

Introduïm el terme de lligadura:

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) + \omega(p - y) \\ \dot{p} = -\partial_q \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) - \omega(q - x) \\ \dot{x} = \partial_y \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) + \omega(y - p) \\ \dot{y} = -\partial_x \bar{\mathcal{H}}(q, p, x, y) - \omega(x - q). \end{cases} \quad (56)$$

Es procedirà a resoldre aquest sistema d'equacions diferencials utilitzant un integrador simplèctic per $\bar{\mathcal{H}}$ de manera explícita.

Notació 5.2. Denotem per $\phi_{H_A}^\delta$, $\phi_{H_B}^\delta$ i $\phi_{\omega H_C}^\delta$ el flux a temps δ de H_A , H_B i ωH_C respectivament.

Aquests fluxos es poden obtenir exactament:

$$\phi_{H_A}^\delta : \begin{bmatrix} q \\ p \\ x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} q \\ p - \delta \partial_q \mathcal{H}(q, y) \\ x + \delta \partial_y \mathcal{H}(q, y) \\ y \end{bmatrix}, \quad \phi_{H_B}^\delta : \begin{bmatrix} q \\ p \\ x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} q + \delta \partial_p \mathcal{H}(x, p) \\ p \\ x \\ y - \delta \partial_x \mathcal{H}(x, p) \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\phi_{\omega H_C}^\delta : \begin{bmatrix} q \\ p \\ x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q+x \\ p+y \end{pmatrix} + R(\delta) \begin{pmatrix} q-x \\ p-y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q+x \\ p+y \end{pmatrix} - R(\delta) \begin{pmatrix} q-x \\ p-y \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \text{amb } R(\delta) := \begin{bmatrix} \cos(2\omega\delta)\mathbb{I} & \sin(2\omega\delta)\mathbb{I} \\ -\sin(2\omega\delta)\mathbb{I} & \cos(2\omega\delta)\mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (58)$$

on \mathbb{I} representa la matriu identitat 3×3 .

Es pot construir un integrador numèric que aproximi $\overline{\mathcal{H}}$ a partir de composicions d'aquest flux. El mètode que s'introdueix a continuació és conegut com a "Strang splitting", i es tracta d'un mètode d'ordre 3 local (per tant, de segon ordre).

$$\phi^\delta = \phi_{H_A}^{\delta/2} \circ \phi_{H_B}^{\delta/2} \circ \phi_{\omega H_C}^\delta \circ \phi_{H_B}^{\delta/2} \circ \phi_{H_A}^{\delta/2} \quad (59)$$

Aquest integrador és simplèctic, ja que cadascun dels fluxos ho és. D'aquesta manera tenim una trajectòria discreta:

$$\begin{bmatrix} q_N \\ p_N \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix} := (\phi^\delta)^N \begin{bmatrix} Q(0) \\ P(0) \\ Q(0) \\ P(0) \end{bmatrix}, \quad (60)$$

on q_N, p_N (i també x_N i y_N) aproximen la solució exacta $Q(N\delta), P(N\delta)$.

Si es donen les mateixes condicions inicials que en el cas de l'integrador de Runge-Kutta però modificades de manera que s'adaptin a les coordenades de l'espai de fases (q, p) , aleshores s'obté el següent resultat:

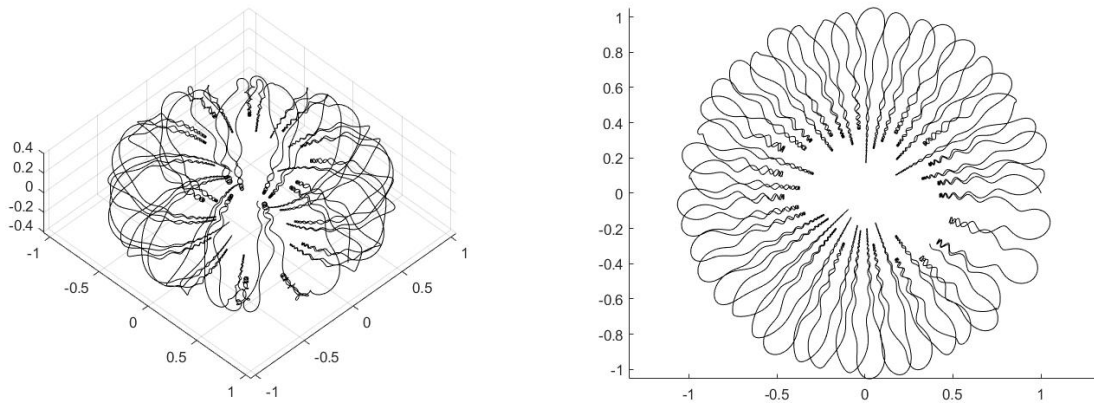


Figura 9: Trajectòries 3D dels ions en influència del camp magnètic terrestre obtingudes amb l'integrador de Strang.

5.3 Quantitats conservades i comparativa entre integradors

En aquest apartat es tractarà el comportament de les quantitats conservades davant dels diferents integradors numèrics usats per a determinar la precisió amb la qual es tenen. Teòricament, aquestes haurien de mantenir-se invariants en tota la trajectòria, però utilitzar càlculs numèrics per a resoldre-ho impedeix que el resultat sigui del tot eficaç. Malgrat això, alguns integradors tenen més bones propietats que d'altres, permetent que es preservin millor. Extraurem conclusions a partir de la gràfica de la variació de l'energia i de ℓ en escala logarítmica. En aquesta secció considerarem que $b = 1$ i $M = 2$ com hem fet en tot el desenvolupament, per tal de simplificar les expressions.

Haviem vist que el hamiltonià és equivalent a l'energia cinètica (23). Degut que els diferents integradors treballen en espais diferents, expressarem l'energia cinètica de manera diferent adequada a cadascun. En

el cas de l'integrador de Runge-Kutta, considerem l'expressió de l'energia cinètica

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (61)$$

mentre que en el cas de l'integrador simplèctic considerem el hamiltonià en l'espai de fases (q, p)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - bp_y \frac{x}{r^3} + bp_x \frac{y}{r^3} + \frac{Mb^2}{2} \frac{x^2 + y^2}{r^6}. \quad (62)$$

Considerem l'energia inicial com l'avaluada en les condicions inicials, i per a cada instant de temps calculem la diferència amb l'energia calculada a cada pas. D'aquesta manera, graficarem en escala logarítmica la variació que pateix a causa dels càlculs numèrics. Els resultats obtinguts són els següents:

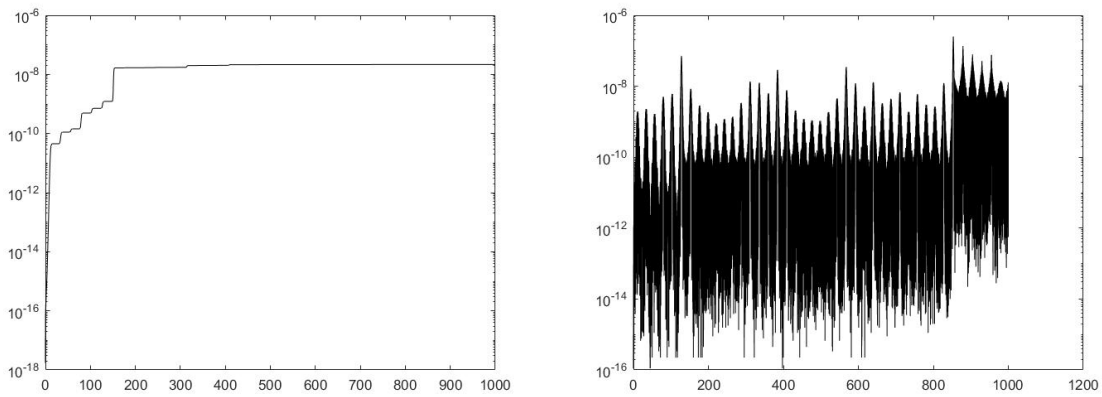


Figura 10: Diferència entre l'energia inicial i l'energia calculada a cada temps en escala logarítmica, utilitzant Heun a l'esquerra i Strang Splitting a la dreta.

En el cas de l'integrador de Heun, es pot observar per la figura 10 que l'energia calculada va augmentant respecte de l'energia inicial en valor absolut, és a dir, cada vegada difereix més de la calculada inicialment. En 1000 unitats de temps, arriba a una diferència d'ordre gairebé 10^{-7} .

En el cas del mètode de Strang, es pot observar que no hi ha una tendència clara respecte de la variació de l'energia, ja que es manté oscil·lant entre diferències de 10^{-6} i de 10^{-16} en el temps. A grans trets, es veu que es manté a valors inferiors respecte de la gràfica del Runge-Kutta. Per tant, es dedueix que l'integrador simplèctic es comporta millor amb la conservació de l'energia en comparació amb el mètode de Runge-Kutta.

Anem a veure si la quantitat ℓ també es comporta de la mateixa manera. Recordem que aquesta quantitat s'obté de l'expressió (36) en cartesianes:

$$\ell = \frac{b}{r^3}(x^2 + y^2) + x\dot{y} - y\dot{x}. \quad (63)$$

Substituint $b = 1$ i $M = 2$, la seva expressió en l'espai de fases és:

$$\ell = \frac{xp_y - yp_x}{2}. \quad (64)$$

Ens interessa la diferència de ℓ respecte de la calculada en la condició inicial. Per tant, calculem el seu valor en cada instant de temps i graficarem les diferències en valor absolut en escala logarítmica, i novament farem la distinció entre els resultats obtinguts a partir dels diferents integradors per a determinar quin és més eficaç en la conservació d'aquesta quantitat.

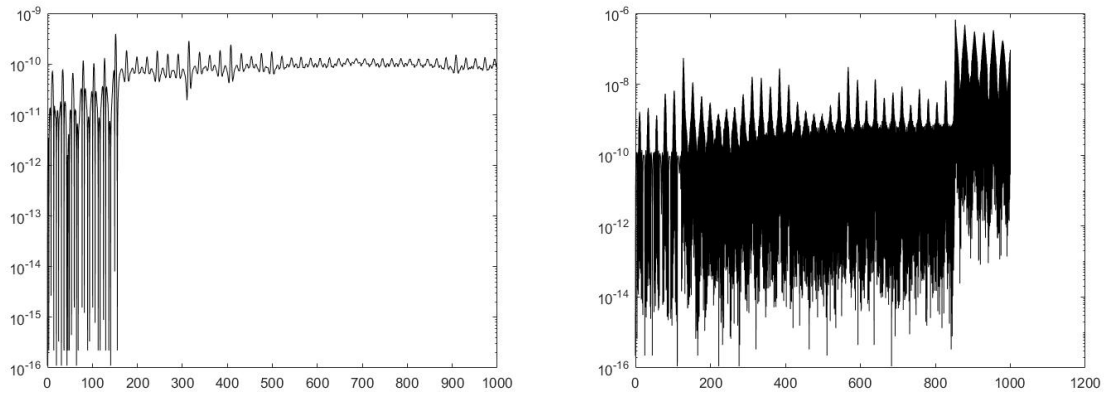


Figura 11: Diferència entre el moment ℓ inicial i el mesurat a cada temps, en escala logarítmica, utilitzant el mètode de Heun a l'esquerra i el mètode de Strang Splitting a la dreta.

En el cas del mètode de Heun, es pot observar per la figura 11 que la ℓ calculada es manté bastant estable, oscil·lant al voltant d'un error de l'ordre de 10^{-10} respecte del valor inicial a partir d'un cert instant de temps.

En canvi, en el cas de l'integrador simplèctic s'observa un comportament semblant al de la gràfica de l'energia, i és que es manté molt dispers però sempre oscil·lant entre valors de 10^{-16} a 10^{-6} .

Per a aquesta quantitat, les diferències amb el mètode de Heun no es veuen clarament diferenciats de les obtingudes amb el mètode de Strang, pel que no es pot obtenir una conclusió clara sobre quin d'ells és més òptim en la conservació d'aquesta quantitat, com en el cas de l'energia.

Anem a veure amb més detall les diferències entre aquests mètodes:

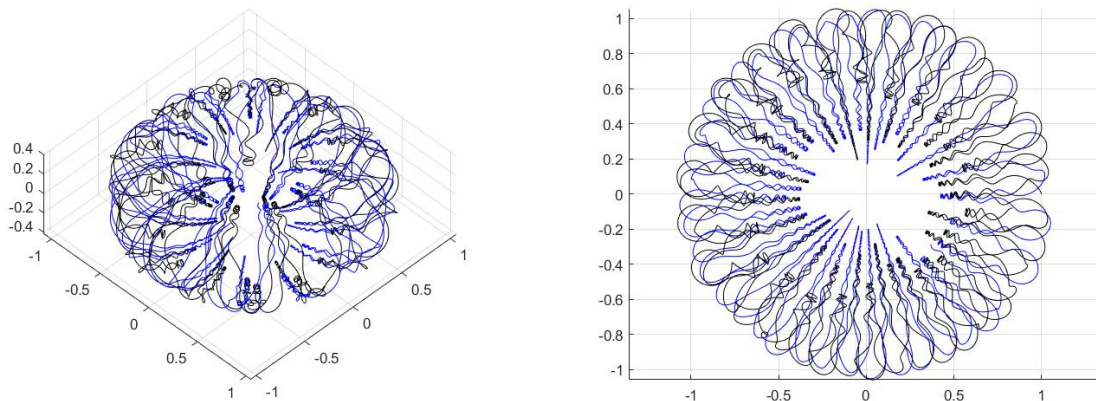


Figura 12: Comparativa entre els dos integradors. En negre, la trajectòria recorreguda usant el mètode de Heun, i en blau usant el mètode de Strang Splitting.

Es pot observar que l'integrador simplèctic té un moviment helicoidal més suau que el cas del Runge-Kutta, on es tenen amb un radi major.

Seguidament, es mostra una gràfica on es veuen les variacions de les quantitats conservades calculades amb cadascun dels mètodes:

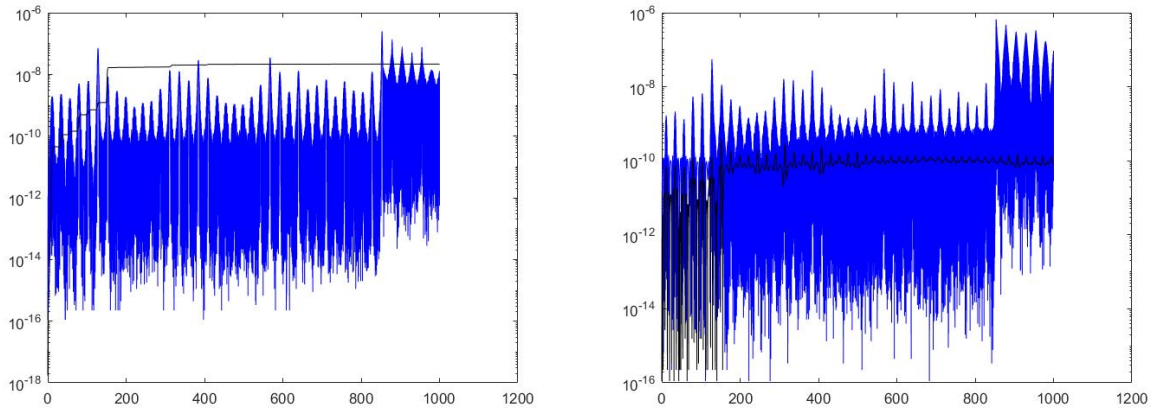


Figura 13: Comparativa entre el comportament dels dos mètodes amb l'energia (esquerra) i ℓ (dreta). En negre, les calculades amb el mètode de Heun, i en blau les calculades amb el mètode de Strang Splitting.

Gràcies a aquesta figura es pot observar que, en efecte, l'energia adquireix més precisió en el cas de Strang a partir d'un cert instant i fins a les 1000 unitats de temps calculades, però no es veu una relació clara per a la quantitat ℓ .

Una opció per a determinar més concretament el comportament enfront de la quantitat ℓ seria augmentar el temps total de l'observació, encara que aleshores els errors numèrics es farien més grans i no es podria arribar a cap conclusió clara amb seguretat.

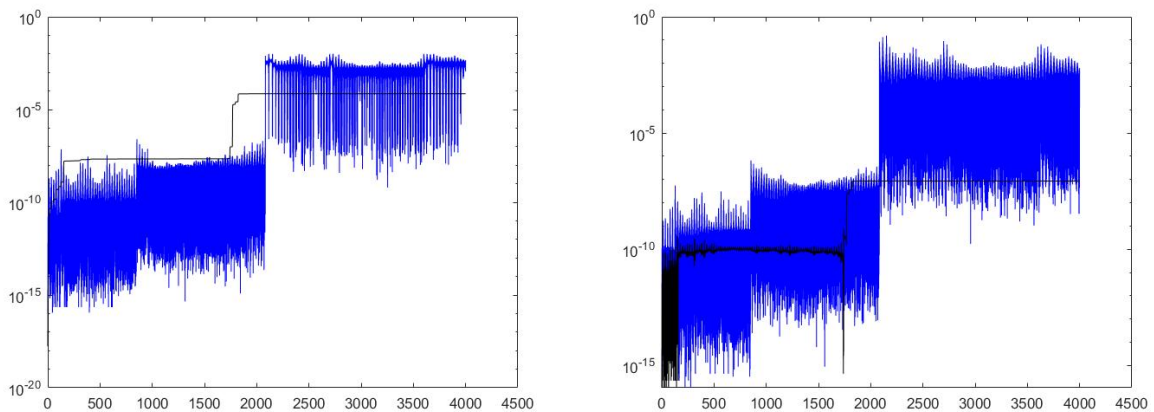


Figura 14: Diferències de les energies (esquerra) i de ℓ (dreta) fins a un temps $T = 4000$.

Es pot observar en aquest cas que l'integrador simplèctic perd molta precisió a partir de les 2000 unitats de temps en totes dues quantitats, pel que a partir de llavors l'integrador simplèctic comença a ser poc fiable.

6. Moviments amb lligadures

En aquest capítol s'estudia com es comporten les solucions i les quantitats conservades del sistema quan ens restringim a una certa superfície.

Per la naturalesa de les forces que actuen, el cas de la restricció a una superfície esfèrica centrada en el dipol no és possible de manera natural, però serà útil per tal d'il·lustrar les complexes dinàmiques d'una càrrega puntual en influència del camp magnètic del dipol.

En canvi, veurem que el moviment equatorial sorgeix de manera natural i és possible a la realitat.

6.1 Trajectòries sobre l'equador

En aquesta secció s'estudiaran els moviments purament equatorials. El moviment sobre el pla equatorial és possible degut que, si r i v són ortogonals a \vec{k} , llavors el camp magnètic (2) és paral·lel a \vec{k} . En aquest cas, la força de Lorentz

$$F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (65)$$

està continguda en el pla equatorial, és a dir, el moviment es troba confinat en aquest pla.

Per tant, suposem a partir d'ara la restricció al pla equatorial i una partícula donada en aquest pla, movent-se amb una certa velocitat satisfent $\dot{\theta} = 0$. Usarem les coordenades polars (r, ϕ) en aquest cas, fixant la colatitud a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Recordem que les quantitats conservades trobades eren definides per les expressions

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = u^2, \quad \left(r^2\dot{\phi} + \frac{b}{r}\right) \sin^2 \theta = \ell. \quad (66)$$

Per tant, fixats els valors per la colatitud i substituint per les quantitats conservades, obtenim:

$$u^2 = \dot{r}^2 + \left(\frac{\ell}{r} - \frac{b}{r^2}\right)^2 \quad r^2\dot{\phi} + \frac{b}{r} = \ell. \quad (67)$$

Es pot veure fàcilment que aquestes dues equacions obtingudes desacoblen i fan que el càlcul sigui molt més senzill i es pugui resoldre de forma analítica. L'equació per r correspon al moviment unidimensional d'una partícula sotmesa al potencial efectiu

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2}M \left(\frac{\ell}{r} - \frac{b}{r^2}\right)^2. \quad (68)$$

La segona equació permet obtenir la velocitat azimuthal una vegada obtinguda l'equació de r . Dibuixant $V_{ef}(r)$ es pot tenir una idea de com és el moviment en el pla equatorial.

Segons els signes que prenguin les constants b i ℓ , la forma de la gràfica del potencial efectiu pot variar molt. Considerem que se satisfà $b > 0$, prenent l'eix \vec{k} en el sentit de \mathbf{m} en cas que la càrrega e sigui positiva, i en direcció contrària si és negativa. Suposant ara que s'han escollit els eixos de tal manera que $b > 0$, separem casos segons el signe de ℓ .

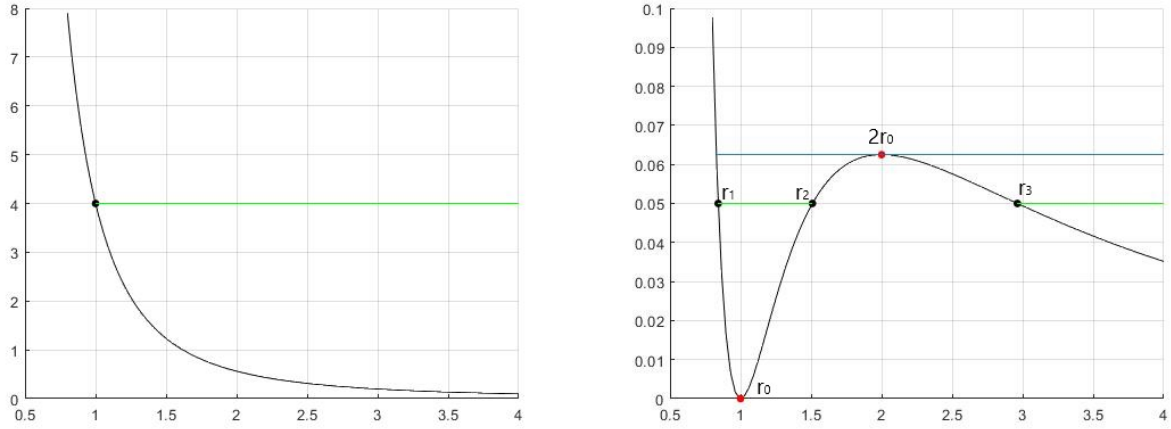


Figura 15: Potencial efectiu $V_{ef}(r)$ amb (a) $\ell < 0$ i amb (b) $\ell > 0$

Observem que si $\ell < 0$, aleshores V_{ef} decreix de forma monòtona (vegeu figura 15) i per tant no existeixen solucions fitades, ja que totes vénen de l'infinít i tornen a marxar després d'aproximar-se a l'origen, tal com mostra la línia verda.

En canvi, quan $\ell > 0$, V_{ef} s'anul·la en $r_0 = b/\ell$ i assoleix un màxim local per a $2r_0$, que satisfà $V_{ef}(2r_0) = \frac{1}{2}Mu_M^2$, on $u_M = \ell^2/(4b)$.

A més, quan la velocitat u satisfà $u \equiv 0$, llavors la partícula es troba aturada a $r = r_0$. Aquest cas també és solució, ja que quan la partícula no es mou, llavors la força del camp magnètic sobre la partícula s'anul·la d'acord amb l'expressió de la força de Lorentz (65). Per a punts $r < 2r_0$ tals que $u \in (0, u_M)$ les òrbites són fitades, i per a la resta de casos no ho són, sinó que vénen de l'infinít i tornen a marxar. L'única excepció és el cas $u = u_M$ i $r < 2r_0$ (recta blava de la gràfica), on es té una òrbita homoclínica en el punt $r = 2r_0$, que es tracta d'un punt d'equilibri inestable.

En aquesta secció s'estudiarà més detalladament el comportament de les òrbites fitades. Aquest tipus d'òrbites, tal com havíem dit anteriorment, es presenten quan $u \in (0, u_M)$ i amb $r < 2r_0$. Observem que es tracta d'un cas de moviment purament equatorial el qual es produeix sense cap aparició de noves forces, només considerant que ens trobem sota la interacció de la força magnètica terrestre. Per aquest motiu, el model trobat al desenvolupament del problema general serà el mateix que s'haurà d'utilitzar en aquest cas per a veure les trajectòries que se satisfan, treballant sobre el pla equatorial.

Prenent l'equació del moviment en coordenades cartesianes (26), el valor de la component z cal fixar-lo a 0, ja que prenem com a origen de coordenades el centre de la Terra, i també el de la seva velocitat. D'aquesta manera, les equacions del moviment seran de la forma següent:

$$\ddot{x} = \frac{-b\dot{y}}{r^3} \quad \ddot{y} = \frac{b\dot{x}}{r^5} \quad (69)$$

Per tal de veure la trajectòria que traça la partícula dibuixem el gràfic de la solució de l'equació diferencial. Es pot veure que les òrbites tenen forma epicloïdal. Considerant $b = 1$ en unes certes unitats arbitràries, trobem que la solució és la següent.

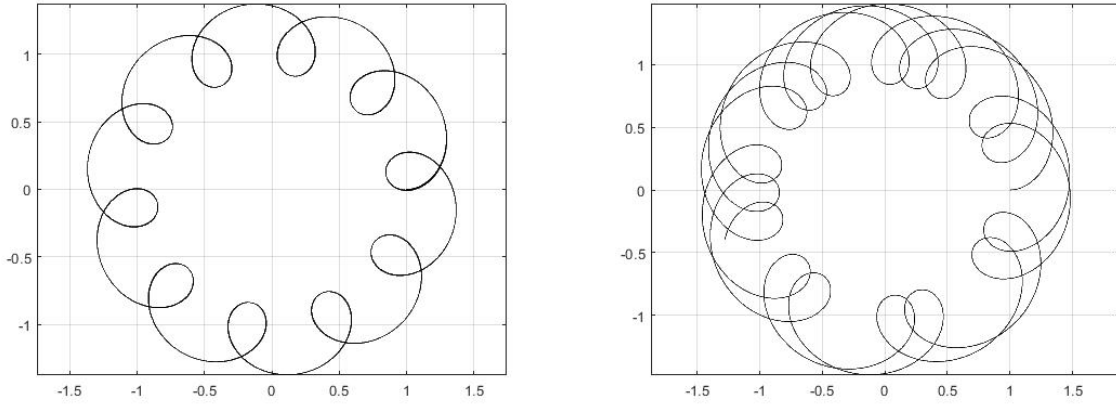


Figura 16: Òrbites amb posició inicial $(1,0)$ i velocitats (a) $v = (0.2, 0)$, (b) $v = (0.22, 0)$

Una altra observació important és que el radi de l'epicicloide està relacionat amb la velocitat de la partícula. De fet, aquesta proporcionalitat és directa.

S'observa una relació entre l'energia de la partícula i el radi de l'epicicloide. En concret, es veu que com més energia té, més gran és aquest radi. En la figura 16, la primera gràfica correspon a la trajectòria d'una partícula amb velocitat de $0.2\vec{i}$ i posició inicial $(x, y) = (1, 0)$, mentre que a la de la dreta, la velocitat inicial és de $0.22\vec{i}$. Es comprova que a mesura que aquesta augmenta, ho fa també el radi de l'epicicloide. Les figures següents (17) corresponen al mateix experiment, però amb velocitat $0.24\vec{i}$ i $0.25\vec{i}$ respectivament.

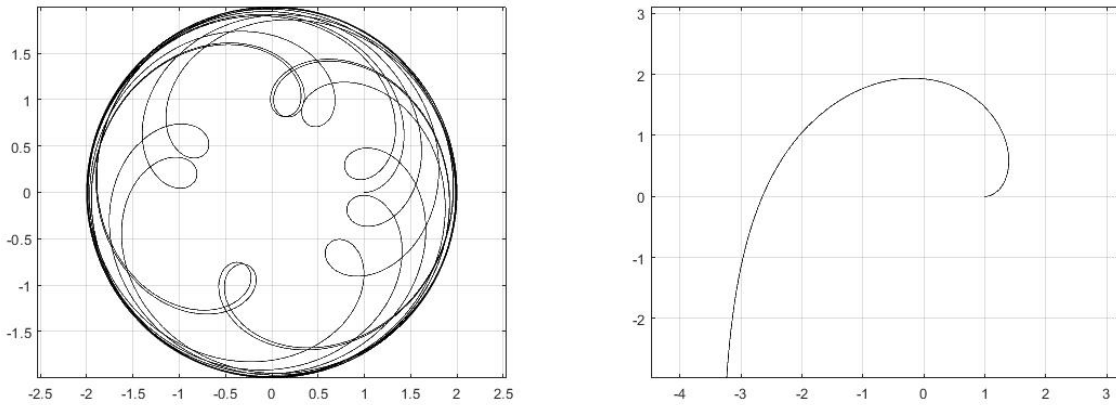


Figura 17: Òrbites amb posició inicial $(1,0)$ i velocitats (a) $v = (0.25, 0)$, (b) $v = (0.26, 0)$

Per tant, s'observa que quan la velocitat arriba a 0.25, aleshores se supera l'òrbita homoclínica i la partícula escapa de la influència del camp.

Definició 6.1. El **període radial** T_r és el temps que triga la partícula a fer una oscil·lació radial completa al llarg del moviment epicicloïdal.

Podem prendre l'expressió de $\dot{r}^2 = u^2 - \left(\frac{\ell}{r} - \frac{b}{r^2}\right)^2$ de l'equació (67). Escrivint $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, aïllant dt i integrant, s'obté que el temps en què es tarda a fer una oscil·lació epicloïdal és expressat per:

$$T_r = \frac{2}{u} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - (\ell r - b)^2 / u^2}}. \quad (70)$$

Observem que el denominador té 4 arrels reals, que corresponen als punts r_1 , r_2 i r_3 de la figura 15 i a un punt $r = -r_4$ negatiu, donats per $r_i = \ell x_i / (2u)$, on

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1+\delta} - 1 & x_2 &= 1 - \sqrt{1-\delta} & x_3 &= 1 + \sqrt{1-\delta} & x_4 &= 1 + \sqrt{1+\delta} \\ x_0 &= \frac{\delta}{2}, & 2x_0 &= \delta, & \delta &= \frac{4ub}{\ell^2} \end{aligned}$$

Si estem en el cas d'òrbites fitades, aleshores $\delta \in (0, 1)$. A més, si $\delta \rightarrow 0$ ens trobem molt a prop del punt d'equilibri estable, i si $\delta \rightarrow 1$ ens trobem prop de l'òrbita homoclínica. Per tant, per valors de $\delta > 1$ la partícula escapa de la influència de l'energia potencial i se'n va a l'infinit. De fet, en les figures observades anteriorment, la figura 16(a) té $\delta = 0.8$, mentre que la gràfica de la figura 17(a) té $\delta = 1$, pel que eventualment pot escapar.

6.2 Òrbites periòdiques sobre els meridians

En el cas de les trajectòries meridionals no es procedirà de la mateixa manera que en les equatorials. Això és perquè el moviment purament equatorial es donava quan la posició i velocitat respecte de l'eix z eren nul·les, ja que aleshores la força de Lorentz (65) permetia el confinament de la partícula al pla.

No és el cas de les trajectòries meridionals. Si es pren un angle azimutal inicial, per exemple $\phi = 0$ amb velocitat nul·la $\dot{\phi} = 0$ i velocitat latitudinal $\dot{\theta} \neq 0$, s'observa que la partícula té un moviment de rotació al voltant del dipol, pel que no es manté sobre d'un meridià tal com es pot observar a la figura 5.

Per tant, en aquest capítol no es treballarà amb òrbites restringides en un meridià, sinó que està dedicat a trobar moviments periòdics respecte dels meridians. Dit d'altra manera, es considera el pla generat per \vec{k} i el vector posició de la partícula \mathbf{r} , i es pretén trobar òrbites que es tanquin en una sola oscil·lació.

Suposem que s'inicia el moviment al pla equatorial i en direcció vertical, és a dir, amb $\dot{\theta} < 0$ i $\theta = \frac{\pi}{2}$. L'objectiu és trobar un instant tal que la posició i velocitat coincideixin amb els seus valors inicials per a tots els paràmetres, tant de posició com de velocitat. El paràmetre que haurem de variar per tal de trobar l'òrbita és la quantitat ℓ .

Recordem que les equacions del moviment en coordenades esfèriques (41) són:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{3b\ell}{r^4} + \frac{2b^2 \sin^2 \theta}{r^5} \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \left(\frac{\ell^2}{r^2 \sin^4 \theta} - \frac{b^2}{r^4} \right) \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (71)$$

Escrivim aquest sistema d'equacions de segon ordre com a quatre equacions de primer ordre per tal de codificar-ho al MATLAB. Desenvolupem primer el terme $(r^2 \dot{\theta})'$:

$$(r^2 \dot{\theta})' = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}.$$

Substituint a l'equació i aïllant $\ddot{\theta}$, s'obté que:

$$\begin{cases} \dot{r} = u \\ \dot{\theta} = v \\ \dot{u} = rv^2 + \frac{\ell^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{3b\ell}{r^4} + \frac{2b^2 \sin^2 \theta}{r^5} \\ \dot{v} = \left(\frac{\ell^2}{r^4 \sin^4 \theta} - \frac{b^2}{r^6} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{2uv}{r}. \end{cases} \quad (72)$$

Per tal de trobar l'instant on es creua l'equador de manera ascendent construirem una funció F tal que $F(\mathbf{a}_0, \ell) = \mathbf{a}_1$, on $\mathbf{a} = (r, \theta, u, v)$ i els subíndexs fan referència a l'estat inicial i final. Aquesta funció F es tracta de l'equació diferencial (72) en un instant $t > 0$ tal que satisfaci $\theta = \frac{\pi}{2}$ i $\dot{\theta} > 0$ per primera vegada. Per tal de trobar aquest instant precís s'ha optat per fer un event de la funció ode45 de MATLAB amb el qual s'obté amb precisió quin és l'instant en què el sistema adquireix la colatitud desitjada.

Amb aquesta informació, es construeix una funció $G(\mathbf{a}, \ell) = F(\mathbf{a}, \ell) - \mathbf{a}$. Aquesta funció serà la que ens proporcionarà el valor de ℓ pel qual es té l'òrbita periòdica. Se li aplicarà la funció fsolve de MATLAB per trobar zeros, ja que volem que \mathbf{a}_0 i \mathbf{a}_1 coincideixin.

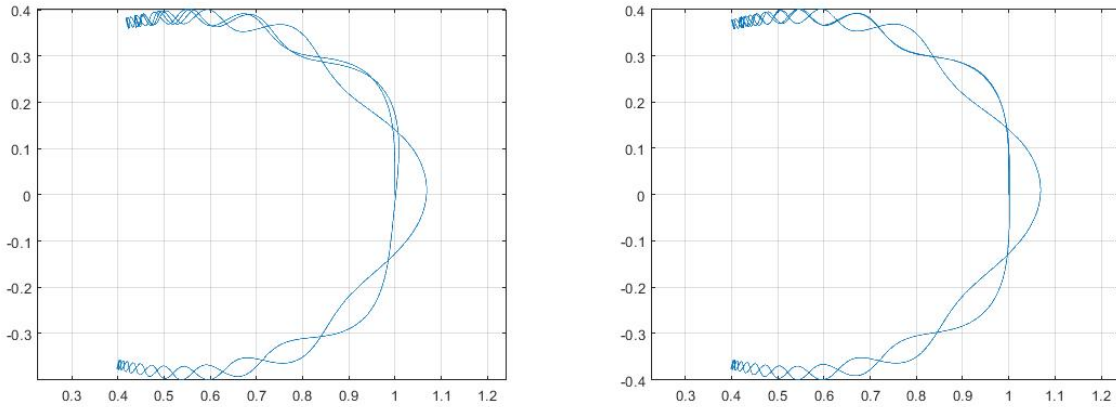


Figura 18: (a) $\ell = 1$, (b) $\ell = 0.999997530687396$

Degut que usem un únic paràmetre per arribar a trobar l'instant en el qual un vector de longitud 4 es fa zero, és clar que no podem esperar obtenir-lo amb molt bona precisió. De totes maneres, en l'òrbita considerada com a periòdica, el punt \mathbf{a}_1 dista de \mathbf{a}_0 en un valor de 10^{-3} com a màxim per a totes les seves coordenades, pel que es pot observar un comportament quasi periòdic per a temps petits.

6.3 Trajectòries a distància constant

En aquesta secció es tracta el cas de la restricció del problema clàssic a una superfície esfèrica, interactuant amb el dipol magnètic situat al centre de l'esfera. Encara que el model no pot ser aplicat a l'estudi de casos reals de radiació còsmica i del camp de la Terra, aquest permet il·lustrar les complexes dinàmiques d'una càrrega puntual en el camp magnètic d'un dipol.

En aquest capítol es tractarà el sistema en coordenades esfèriques, considerant un radi R constant. Per tant, només es tenen dues variables, que són la colatitud i l'azimut. Suposem que tenim el dipol de moment dipolar \mathbf{m} en direcció cap avall, és a dir, $-\mathbf{m}\hat{k}$. Sigui M la massa de la partícula, i els eixos x i y localitzats al pla equatorial, i z és la vertical de l'eix de simetria. Amb aquesta selecció es té que el pol sud magnètic està en la direcció del pol nord magnètic. Aquest és el mateix cas que el camp magnètic de la Terra. Aleshores, el potencial vector magnètic és

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi R^2}, \quad (73)$$

on μ_0 és la permeabilitat magnètica al buit. En coordenades esfèriques es pot escriure el vector \mathbf{A} com

$$\mathbf{A} = \frac{-\mu_0 \mathbf{m} \sin \theta}{4\pi R^2} \hat{\phi}. \quad (74)$$

Usarem el lagrangiana del sistema per a deduir les equacions del moviment, i a més ens permetrà trobar quantitats conservades i simetries. El lagrangiana del sistema és de la forma

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (75)$$

on T és l'energia cinètica i $V = -q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ és l'energia potencial de la partícula, depenent de la velocitat \mathbf{v} . En coordenades esfèriques, la velocitat es pot escriure també com

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + R\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}. \quad (76)$$

Substituint l'expressió de \mathbf{A} i de \mathbf{v} en coordenades polars a l'expressió de l'energia potencial V s'obté que

$$V = b\dot{\phi}\sin^2\theta, \quad \text{on } b = \frac{q\mu_0 m}{4\pi R}. \quad (77)$$

De la mateixa manera, l'expressió de l'energia cinètica és

$$T = \frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta). \quad (78)$$

Aleshores, el lagrangiana s'escriu en coordenades esfèriques com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}MR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - b\dot{\phi}\sin^2\theta. \quad (79)$$

Trobem ara els moments canònics. Aquests es defineixen a partir de l'expressió del lagrangiana com

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = [MR^2\dot{\phi} - b]\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (80)$$

Es pot observar que el terme definit per

$$\eta \equiv MR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (81)$$

és la component del moment angular al llarg de l'eix de simetria z . Degut que la component ϕ és prescindible per simetria de la superfície, aleshores p_ϕ és una constant del moviment, però no es tracta del moment angular, ja que té un terme causat pel camp magnètic, que no depèn de la velocitat. Per tant, aquesta és la primera quantitat conservada:

$$p_\phi = \eta - b \sin^2 \theta = c_1 \implies \eta = c_1 + b \sin^2 \theta. \quad (82)$$

El hamiltonià del sistema es defineix en aquest cas com

$$\mathcal{H} = \dot{\theta} p_\theta + \dot{\phi} p_\phi - \mathcal{L}. \quad (83)$$

D'aquesta expressió se'n dedueix que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} MR^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta), \quad (84)$$

que es correspon amb l'energia cinètica de la partícula. Si el reescrivim en funció dels moments, obtenim que el hamiltonià s'escriu com

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2MR^2} \left[p_\theta^2 + \frac{(p_\phi + b \sin^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (85)$$

Usant la η definida a (82), es poden escriure les equacions del hamiltonià. Primer, es té que

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{MR^2}, \quad (86)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{c_1 + b \sin^2 \theta}{MR^2 \sin^2 \theta}. \quad (87)$$

Les altres dues equacions restants són:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{c_1 + b \sin^2 \theta}{MR^2 \sin^2 \theta} [(c_1 + b \sin^2 \theta) \cot \theta - b \sin 2\theta], \quad (88)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0. \quad (89)$$

Podem considerar aquestes equacions com a un sistema de 4 equacions de primer ordre i integrar-les numèricament per tal de veure quines són les trajectòries que seguirà aquesta partícula. En aquest cas, s'utilitzarà l'integrador de MATLAB ode45 per a resoldre les equacions i dibuixar les figures obtingudes.

Suposarem un valor de $M = 2$, $R = 10$ i $b = 0.5$ en unes certes unitats arbitràries per a tots els càlculs d'aquesta secció. El valor inicial de l'azimut pot ser qualsevol valor arbitrari a causa de les simetries del problema. Prendrem $\phi = 0$.

Considerem una colatitud inicial de $\theta = \frac{\pi}{3}$ i amb un valor inicial de moment $p_\theta = 0$, podem variar el valor del moment p_ϕ per determinar quin comportament té el sistema respecte d'aquest paràmetre.

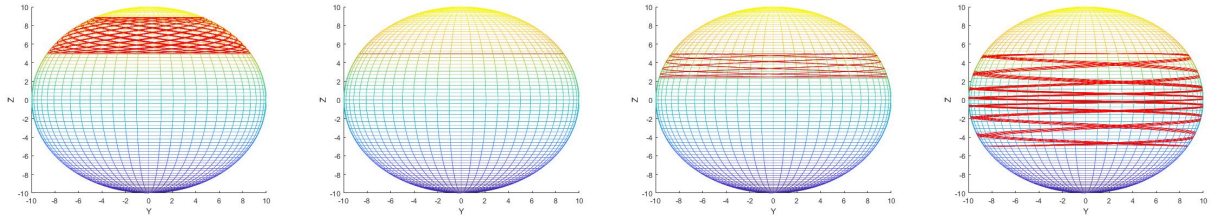


Figura 19: Comportament de la partícula amb $\theta = \frac{\pi}{3}$, $p_\theta = 0$ i uns valors de (a) $p_\phi = 0.4b$, (b) $p_\phi = 0.75b$, (c) $p_\phi = 0.84b$, (d) $p_\phi = 0.87b$.

Es pot observar que per $p_\phi > 0$ transcorren diferents fases. Per valors prou petits (19(a)), el sistema permet unes trajectòries que es mouen en intervals de colatitud prou diferents, sempre per sobre de la inicial. A mesura que creix el valor de p_ϕ es va fent més estret el recorregut vertical de la partícula, fins que per un valor de $p_\phi = 0.75b$ (19(b)) s'aconsegueix que la corba estigui continguda en un paral·lel. Si augmentem més el valor, es pot veure per les dues últimes figures que es va ampliant el recorregut vertical fins a arribar a traspasar l'equador, des del qual en aquest cas es tindrà simetria (19(d)).

Prenem ara un valor inicial de $p_\theta = 0.2$. Farem el mateix procés que en el cas anterior. Es consideren variacions en el valor de $p_\phi > 0$ per veure com varien aquestes trajectòries.

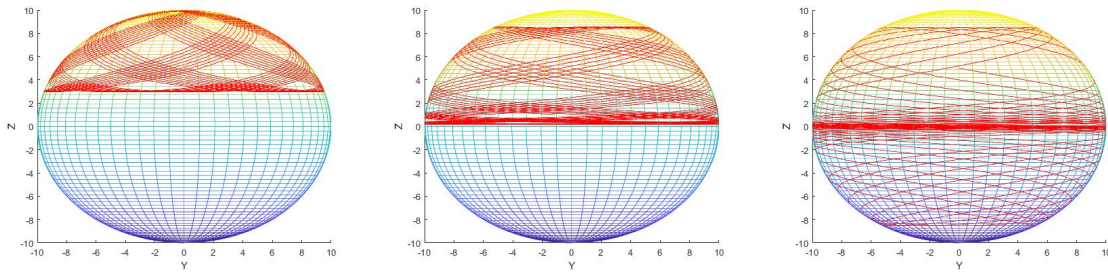


Figura 20: Comportament de la partícula amb $\theta = \frac{\pi}{3}$, $p_\theta = 0.2$ i uns valors de (a) $p_\phi = 0.1b$, (b) $p_\phi = 0.519b$, (c) $p_\phi = 0.520b$

A la figura 20 es mostra l'evolució de la trajectòria al variar el valor de $p_\phi > 0$. Es pot observar que quan es manté suficientment baix apareix una trajectòria bastant uniforme però amb un desfasament. Si augmentem el valor fins a 0.519, es pot veure que a més d'obtenir corbes més longitudinals, també s'arriba a un valor de colatitud superior. En el cas particular de la figura 20(b) l'òrbita és molt propera al pla equatorial, pel que si eventualment arribés més avall, aleshores saltaria a l'hemisferi sud de l'esfera, tal com es mostra a la figura 20(c).

Considerant ara valors de $p_\phi < 0$ es procedeix de la mateixa manera.

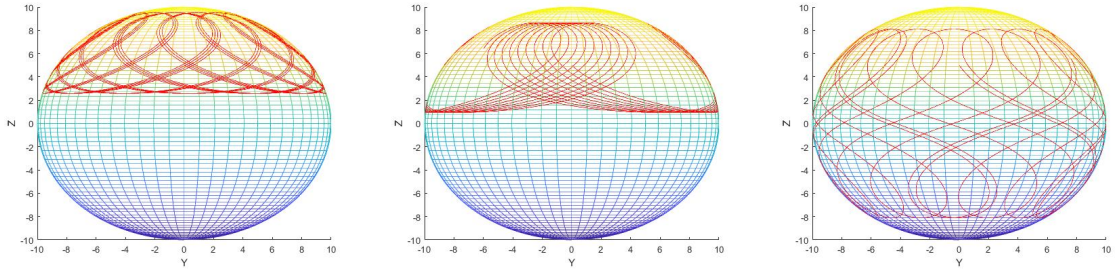


Figura 21: Comportament de la partícula amb $\theta = \frac{\pi}{3}$, $p_\theta = 0.2$ i uns valors de (a) $p_\phi = -0.3b$, (b) $p_\phi = -0.5b$, (c) $p_\phi = -0.6b$

En aquest cas s'observa un comportament semblant al de $p_\phi > 0$. Per valors baixos del moment, les partícules es mouen seguint un moviment epicicloïdal sobre l'hemisferi nord de l'esfera. A mesura que disminueix el valor de p_ϕ (augmenta en valor absolut), el radi de l'epicicloïde augmenta fins que traspassa l'equador i comença a oscil·lar entre els dos hemisferis (21(c)).

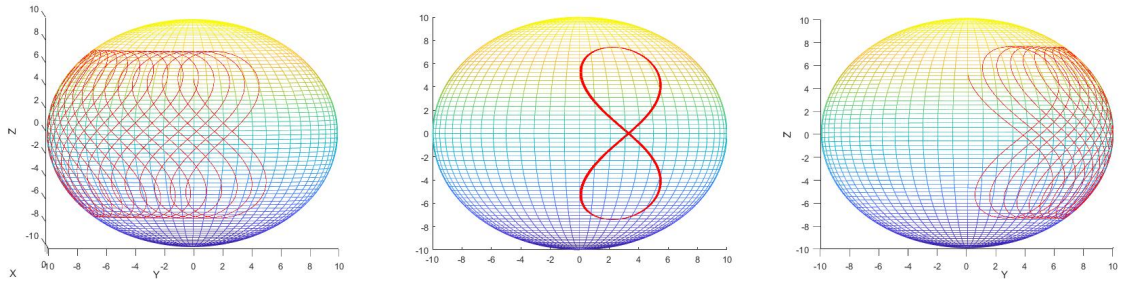


Figura 22: Comportament de la partícula amb $\theta = \frac{\pi}{3}$, $p_\theta = 0.2$ i uns valors de (a) $p_\phi = -0.735b$, (b) $p_\phi = -0.722b$, (c) $p_\phi = -0.71b$

Si es segueix disminuint el moment s'observa que la partícula té més tendència a moure's cap a la dreta. Això es veu per exemple en la transició de la figura 22. De fet, arriba un moment que s'obté una òrbita periòdica (22(b)) en el valor de $p_\phi = -0.722b$, i a partir d'aquest valor s'inverteix el sentit del desplaçament de la partícula.

7. Conclusions

Al llarg d'aquest treball s'han mostrat els mètodes de Heun i de Strang Splitting per a resoldre equacions diferencials, que s'han utilitzat per tal de veure quin tipus d'integrador era el que preservava millor les quantitats conservades.

Tal com s'ha vist en la secció 5.3, l'integrador simplèctic és millor en la conservació de l'energia respecte del Heun, però no es té el mateix comportament per a la quantitat ℓ , ja que en aquest cas se sospita que no són comparables. Aquest raonament aplica en el cas que el temps sigui suficientment petit, ja que s'ha observat que per a temps majors de 2000 unitats, l'integrador simplèctic comença a perdre qualitat en el càlcul, provocant que les possibles conclusions puguin ser errònies.

També s'ha observat que el mètode de Heun és molt més estable que el simplèctic, en el sentit que la gràfica de les diferències de l'error es mantenia en valors propers durant molt de temps. En canvi, el mètode de Strang Splitting s'ha pogut veure a la figura 14 que és molt inestable i, encara que es manté en un interval per molt de temps, aquest interval és molt llarg.

En el cas de les trajectòries sobre el pla equatorial, s'ha fet un anàlisi del comportament de les òrbites i del seu radi epicloïdal. En el pla meridional ens hem dedicat a trobar òrbites periòdiques variant la quantitat conservada ℓ i en la superfície esfèrica hem anat variant alguns dels paràmetres per veure com afectaven el comportament de la trajectòria. En tots tres casos s'han trobat òrbites periòdiques o quasiperiòdiques, i de dos tipus diferents en el cas de la superfície esfèrica.

Personalment, m'ha agradat fer aquest treball, ja que he après i consolidat moltes coses vistes al grau relacionades amb la física que m'havien interessat. Poder obtenir totes aquestes trajectòries només tenint en compte la força magnètica de Lorentz em sembla fascinant. A banda de les dificultats que he tingut en codificar alguna part i en entendre alguns passos, crec que aquest treball també m'ha ajudat molt a entendre els fenòmens relacionats amb aquestes partícules, com les aurores i les radiacions i corrents que afecten satèl·lits i a la superfície terrestre. També ha sigut molt interessant conèixer el funcionament dels integradors numèrics i el motiu pel qual és important que un codi sigui eficient.

Referències

- [1] Departamento de Física Aplicada III, Universidad de Sevilla. *Dipolo magnético*, 2009. http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo_magnético
- [2] V. V. Markellos, S. Klimopoulos. A new family of periodic oscillations in the Störmer problem: The principal asymmetric. *Astrophysics and Space Science* **48** (1977) 471-482.
- [3] Emilio Cortés, David Cortés Poza. Störmer problem restricted to a spherical surface. *European Journal of Physics* **36** (2015).
- [4] R. Schuster, K. O. Thielheim. Generalisation of the Störmer problem. *Journal of Physics A: Math. Gen.* **20** (1987) 5511-5516.
- [5] Alvaro Meseguer. Fundamentals of Numerical Mathematics for Physicists and Engineers. *John Wiley & Sons, Inc.* (2020)
- [6] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. Geometric Numerical Integration: Structure- Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. *Springer, Berlin Heidelberg New York, second edition.* (2006)
- [7] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. Geometric numerical integration illustrated by the Störmer/Verlet method (Acta Numerica (2003)) *Cambridge University Press*, (2003) pp. 1-51.
- [8] Rui Dilão, Rui Alves-Pires. Chaos in the Störmer problem. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* **75** (2007). 175-194.
- [9] Molei Tao. Explicit symplectic approximation of nonseparable Hamiltonians: algorithm and long time performance. *Phys. Rev. E* **94**, 043303 (2016).

A. Codis de MATLAB

Feu clic o copieu en el següent enllaç per accedir als codis de MATLAB:

<https://drive.google.com/drive/folders/1ei7zri9oxGbuK0twXAORp2nYHcTtXwGa?usp=sharing>

A.1 Integrador ode45 per a la equació general

```
options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
```

```
ci = [1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0.1] ; Tmax = 2000 ;
```

```
[T,XV] = ode45(@vfield,[0 Tmax],ci,options);
```

```
X = XV(:,1) ; Y = XV(:,2) ; Z = XV(:,3) ;
```

```
U = XV(:,4) ; V = XV(:,5) ; W = XV(:,6) ;
```

```
%3D plot
```

```
figure(1)
```

```
plot3(X,Y,Z,'-k'); grid on
```

```
axis equal
```

```
%-----
```

```
function [adot] = vfield(t,a)
```

```
    x = a(1) ; y = a(2) ; z = a(3) ;
```

```
    u = a(4) ; v = a(5) ; w = a(6) ;
```

```
    adot = a*0; r = (x^2+y^2+z^2)^.5;
```

```
    adot(1) = u ;
```

```
    adot(2) = v ;
```

```
    adot(3) = w ;
```

```
    adot(4) = (1/r^5)*((3*z^2-r^2)*v - 3*y*z*w);
```

```
    adot(5) = (1/r^5)*(3*x*z*w+(r^2-3*z^2)*u);
```

```
    adot(6) = (3*z/r^5)*(y*u-x*v);
```

```
end
```

A.2 Mètode de Heun

La funció f que demana d'input és la mateixa que en el cas anterior, anomenada "vfield".

```
function [T,XV] = heun(f,tn,ci,h)
```

```
    t0 = tn(1); tf = tn(2);
```

```
    XX = zeros(tf/h+1,6);
```

```
    T = zeros(tf/h+1,1);
```

```
    XX(1,:) = ci'; T(1) = t0;
```

```
    x = ci; t = t0;
```

```

for i=1:(tf/h)
    a = h*f(t,x); b = h*f(t+h,x+a);
    x1 = x + (a+b)/2;
    t1 = t+h;

    XX(i+1,:) = x1';
    T(i+1) = t1;

    x = x1; t = t1;
end
end

```

A.3 Mètode de Strang Splitting

La funció anomenada *derivades* conté la derivada analítica del hamiltonià respecte de Q i de P :

```

function [DQ,DP] = derivadesHamiltonia3D(q,p,M,b)
    DQ = zeros(3,1);
    DP = zeros(3,1);

    x = q(1); y = q(2); z = q(3);
    px = p(1); py = p(2); pz = p(3);
    r = norm(q);

    DP(1) = px/M + b*y/r^3 ;
    DP(2) = py/M - b*x/r^3;
    DP(3) = pz/M;

    DQ(1) = -b*py/r^5*(r^2-3*x^2) - 3*b*px*x*y/r^5 + M*b^2*x/r^8*(-2*x^2-2*y^2+z^2);
    DQ(2) = 3*b*py*x*y/r^5 + b*px/r^5*(r^2 - 3*y^2) + M*b^2*y/r^8*(-2*x^2-2*y^2+z^2);
    DQ(3) = 3*b*z/r^7*(py*x*r^2-px*y*r^2-M*b*(x^2+y^2)/r);
end

function [T,XX] = strang_splitting(derivades,timeInterval,ci,w,delta)
    t0 = timeInterval(1); tf = timeInterval(2);
    XX = zeros(12,tf/delta+1);
    T = zeros(tf/delta+1,1);
    XX(:,1) = ci; T(1) = t0;
    x = ci; t = t0;

    for i=1:(tf/delta)
        XX(:,i+1) = flux(derivades,x,delta,w);
        T(i+1) = t+delta;
        x = XX(:,i+1); t = T(i+1);
    end
end

```

```

%-----
%Funció de pas
function [x1] = flux(derivades,x0,delta,w)
    x01 = fluxA(derivades,x0,delta/2);
    x02 = fluxB(derivades,x01,delta/2);
    x03 = fluxC(x02,delta,w);
    x04 = fluxB(derivades,x03,delta/2);
    x1 = fluxA(derivades,x04,delta/2);
end
%-----
%Flux de H_A (q,y)
function [sol] = fluxA(derivades,a,delta)
    q = a(1:3); p = a(4:6);
    x = a(7:9); y = a(10:12);
    [DQ, DP] = derivades(q,y);
    sol = zeros(12,1);
    sol(1:3) = q;
    sol(4:6) = p - delta*DQ;
    sol(7:9) = x + delta*DP;
    sol(10:12) = y;
end
%-----
%Flux de H_B (x,p)
function [sol] = fluxB(derivades,a,delta)
    q = a(1:3); p = a(4:6);
    x = a(7:9); y = a(10:12);
    [DQ, DP] = derivades(x,p);
    sol = zeros(12,1);
    sol(1:3) = q + delta*DP;
    sol(4:6) = p;
    sol(7:9) = x;
    sol(10:12) = y - delta*DQ;
end
%-----
%Flux de wH_C (x,p)
function [sol] = fluxC(a,delta,w)
    q = a(1:3); p = a(4:6);
    x = a(7:9); y = a(10:12);

    R = [ cos(2*delta*w)*eye(3), sin(2*delta*w)*eye(3);
          -sin(2*delta*w)*eye(3), cos(2*delta*w)*eye(3)];

    sol = zeros(12,1);
    sol(1:6) = 0.5*([q+x;p+y] + R*[q-x;p-y]);
    sol(7:12) = 0.5*([q+x;p+y] - R*[q-x;p-y]);
end

```

A.4 Òrbites periòdiques sobre els meridians

```
% Valors inicials
li = 1; ci = [1;pi/2;0;-0.1];

% no periòdica
[T,XV,te,ye] = F(ci,li);

% Busquem l on hi ha orbita periodica
l = fsolve(@(l)G(ci,l),li);

% orbita periodica
[T,XV,te,ye] = F(ci,l);

%-----
function [sol] = G(a,l)
    [T,XV,te,ye] = F(a,l);
    sol = ye(end,:) - a;
end
%-----
function [T,XV,te,ye] = F(ci,l)
    options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12,'Event',@tall);

    b=1; t = 60;
    f = @(t,x)(moviment(x,l,b));
    [T,XV,te,ye] = ode45(f,[0 t],ci,options);
end
%-----
function [value, isterminal, direction] = tall(T, X)
    value      = X(2)-pi/2;
    isterminal = 0;
    direction  = -1;
end
%-----
function [adot] = moviment(x,l,b)
    r = x(1); theta = x(2); u = x(3); v = x(4);

    adot = zeros(4,1);
    adot(1) = u;
    adot(2) = v;
    adot(3) = r*v^2+l^2/(r^3*sin(theta)^2)-3*b*l/r^4+2*b^2*sin(theta)^2/r^5;
    adot(4) = sin(theta)*cos(theta)*(l^2/(r^4*sin(theta)^4)-b^2/r^6)-2*u*v/r;
end
```


A.5 Trajectòries a distància constant

```
options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);

% Condicions
M=2; R=10; b=0.5;
p_theta=0.2;
p_phi=-0.735*b;
ci = [pi/3;0;p_theta;p_phi];

% Creem l'esfera
u=linspace(0,2*pi,61);
v=linspace(0,pi,81);
[u2,v2]=ndgrid(u,v);
x2=R*cos(u2).*sin(v2);
y2=R*sin(u2).*sin(v2);
z2=R*cos(v2);

% Equacions de moviment:
f = @(t,x)hamiltoniaDistancia(t,x,M,R,b,p_phi);
[T,X] = ode45(f,[0 100000],ci,options);

%Dibuixem l'esfera i la trajectòria
theta = X(:,1);
phi = X(:,2);

figure(1)
xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z')
view(90,0)
hold on

mesh(x2,y2,z2);
x = R*sin(theta).*cos(phi);
y = R*sin(theta).*sin(phi);
z = R*cos(theta);
plot3(x,y,z,'-r');
%-----
function [eq] = hamiltoniaDistancia(t,x,M,R,b,c)
    eq = zeros(4,1);
    eq(1) = x(3)./(M*R^2);
    eq(2) = (x(4)+b.*(sin(x(1))^2))./(M*R^2.*(sin(x(1)))^2);
    eq(3) = (x(4)+b.*(sin(x(1))^2))./(M*R^2.*(sin(x(1)))^2).*((x(4)+b.*(sin(x(1))^2)).
        .*cot(x(1))-b.*sin(2.*x(1)));
    eq(4) = 0;
end
```